

NOMBRE, TEMPS ET ESPACE

dans leurs rapports avec les fonctions primitives de la pensée.

Essai de déduction

Par PAUL NATORP

Professeur de Philosophie à l'Université de Marburg (Allemagne).

§ 1. — *Le système des fonctions primitives de la pensée.*

1. L'étude de la logique est de montrer comment l'objet de la connaissance se construit dans la pensée et d'après les lois de la pensée.

2. La connaissance de ces lois, c'est-à-dire la connaissance logique, n'est pas la connaissance psychologique. Ces lois ne déterminent pas, en tout cas pas directement, la connaissance comme un événement en rapport avec une vie psychique, mais le développement du contenu de la connaissance à partir de données premières, d'après une méthode qui soumet à une loi le progrès de connaissance à connaissance. Le meilleur exemple d'un

tel progrès méthodique de la connaissance a été fourni depuis longtemps par les mathématiques. Aussi peu donc que la table de Pythagore ou les éléments d'Euclide sont une étude psychologique, aussi peu la logique, d'après la définition qu'on en donne ici, est-elle une partie ou une dépendance de la psychologie.

3. Elle n'est pas pour cela, comme d'autres le voudraient, une science législative, pas plus que la table de Pythagore n'est une table de la loi où Euclide est législateur. La pensée juste n'est pas juste parce qu'on doit penser ainsi, mais on doit penser ainsi parce que c'est juste, c'est-à-dire parce que de la sorte ce qu'on pense existe, et, autrement n'existe pas. Le sens de ces mots *existe* et *n'existe pas* peut se définir avec précision.

4. Si la connaissance consiste en un progrès méthodique de la pensée, on doit pouvoir trouver un nombre limité de procédés fondamentaux qui rendent possible et assurent ce progrès. Ce sont les hypothèses méthodiques nécessaires et suffisantes à la pensée de l'objet qu'on recherche sous le nom de catégories.

5. Penser, c'est saisir le multiple dans l'unité. La pensée du multiple, comme tel, donne le procédé fondamental de la quantification; la pensée de l'unité de ce multiple, comme telle, donne le procédé de la qualification. Le procédé de la quantité s'achève en trois degrés, comme suit :

a. Introduction du procédé quantitatif en général, par

la position d'un commencement : unité au sens de singularité, **unité** numérique.

b. Progrès d'un objet à un autre, et à un autre encore, et ainsi de suite, de façon que dans le passage d'un terme à un terme nouveau ce qui a été posé précédemment reste posé, et que dans la séparation même un lien subsiste entre le nouveau et l'ancien : pluralité, multitude indéterminée.

c. Conclusion d'une suite de thèses en une seule, qui garde et résume le contenu de toutes les précédentes, dans le concept du tout ou de l'union fermée des parties : unité du multiple, multiplicité déterminée.

Représentation symbolique des trois degrés :

I

III....

(I) (II) (III).....

6. Ainsi l'unité représente l'introduction du procédé en général, la pluralité représente la continuation de ce procédé, le mouvement d'un terme à un autre sous forme de séparation; l'une pose la quantité d'une façon absolue, l'autre d'une façon relative¹; la multitude déterminée représente l'arrêt à un degré atteint, non dans l'intention d'y persister, mais dans celle de partir

1. L'unité est absolue en tant que la pluralité est posée par rapport à elle et elle par rapport à rien d'autre. Mais elle n'est pas une détermination absolue de l'objet, comme telle entièrement dépendante du choix du point de vue. On peut dire que l'unité en général est absolue, celle qui est posée dans chaque cas particulier est relative. Ici il s'agit de la première.

du point atteint comme d'un nouveau commencement pour s'avancer sans fin vers de nouvelles étapes. Cette suite de degrés résulte donc de la nature de la pensée comme procédé discursif. Ainsi le processus quantitatif décrit dans ces trois degrés une course circulaire, de telle sorte que pour la détermination de multitudes illimitées les moyens de détermination soient également illimités. Cela, et cela seulement, est le sens purement quantitatif de l'infini, qui n'est donc pas un degré de plus du procédé quantitatif, mais un signe qui caractérise tout le procédé tripartite par lequel nous posons la quantité.

7. Le processus de la qualité doit se développer en une gradation correspondante. Cela résulte non seulement de ce que cette gradation dérive de la constitution fondamentale de notre pensée discursive, mais aussi de ce que les deux moments fondamentaux de la synthèse, qui s'expriment par la qualité et la quantité, l'unité de pensée (au centre de la vue intellectuelle) et la diversité qu'elle unit (le domaine qu'on aperçoit de ce centre) se correspondent nécessairement.

Les degrés sont :

a. Position de l'identité comme fondement de la thèse qualitative en général, ou comme principe de comparaison : unité qualitative, uniformité.

b. Position de ce qui est qualitativement autre et encore autre, et ainsi de suite de façon que dans le passage d'un terme à un autre ce qui a été posé précédemment reste

posé, et que dans la séparation même un lien subsiste entre le nouveau et l'ancien : diversité ou pluralité qualitative, multiformité.

c. Union de ce qui est resté distinct au second degré dans l'unité plus haute, c'est-à-dire plus centrale du genre. Le divers (dit Aristote) est divers en quelque chose ou par rapport à quelque chose, donc ce en quoi ou par rapport à quoi il se diversifie le rend en même temps un et le même : cette unité c'est le genre, le genre est donc l'analogue qualitatif de l'union quantitative; il est unité qualitative de ce qui est qualitativement multiple, totalité au sens qualitatif. Mais tandis que l'unité purement *compositive* de la quantité ne signifie qu'une appréhension extérieure, périphérique, d'une multiplicité pensée d'avance, l'unité *compréhensive* du genre est pensée comme liaison intérieure, centrale, comme enfermant en soi la raison de la multiplicité, comme source ou origine d'où la multiplicité découle. Il est d'autant plus nécessaire de s'arrêter ici que cette origine n'est pas absolue. La pensée cherche seulement le chemin vers l'origine, et elle atteint seulement des origines relatives, de façon que le problème de l'origine se pose toujours à nouveau. Le procédé qualitatif, lui aussi, conduit donc à un processus à l'infini.

8. C'est ainsi que les deux procédés fondamentaux de la quantité et de la qualité se correspondent dans toute leur évolution et qu'ils posent dans une étroite interdé-

pendance les signes fondamentaux du progrès de la connaissance, son extension périphérique et son approfondissement central, c'est-à-dire son unification. Mais ce qui est premier en soi est l'unité primitive du troisième degré de la qualité. Car dans la pensée le contenu détermine le contenant, la hauteur du point de vue fait l'étendue de l'horizon.

9. Ce n'est qu'en envisageant à la fois les deux procédés qu'on obtient le concept de la grandeur, comme distinct de celui de la multitude. La grandeur évaluée simplement comme multitude par le nombre discret (voir § 2) n'exprime que le multiple d'une unité donnée, mais ne détermine pas la grandeur de l'unité elle-même, bien plus elle suppose déjà la grandeur en supposant l'unité. Et si l'on songe à cette grandeur déjà supposée, le passage d'une valeur à une autre par la pure multitude apparaît comme insuffisamment déterminé. Il semble que de 0 à 1, de 1 à 2, etc. (et aussi de $\frac{0}{n}$ à $\frac{1}{n}$ quelque grand que soit n), il y ait toujours une lacune que la pure multitude franchit, mais ne comble pas. En d'autres termes, le nombre, entendu comme simple expression de la multitude, est discret; la numération est pensée comme une limitation. Mais il ne sert à rien d'appeler *donnée* la chose à limiter, la grandeur en général. Il faut bien que le donné soit pensé, et même primitivement élaboré par la pensée; ce ne peut être qu'une fonction

de pensée antérieure qui le donne. Et celle-ci ne peut être que la qualité. Elle éclaire en effet ce que la pure quantité laisse obscur, la continuité de la grandeur. Car cette continuité n'exprime que l'entière totalité des valeurs quelconques situables entre deux limites données, c'est-à-dire elle exprime que toute limite posée dans un intervalle par l'arbitraire de la pensée peut par le même arbitraire être dépassée à son tour, et qu'ainsi l'énonciation faite doit valoir sans nulle restriction à des valeurs situées ou situables entre des limites déterminées. Cette totalité, qui est pensée comme dépassant toute multitude, ne peut être conçue que qualitativement et non quantitativement, c'est-à-dire comme « tout homme » ne signifie pas un nombre assignable, non assignable ou même infini, mais *quiconque est homme*, et alors telle ou telle chose est vraie sans exception de tout ce qui satisfait à la condition posée, que ce soit un ou beaucoup ou une infinité, assignable ou non assignable. La grandeur comme variable, c'est-à-dire variable sans limites, passant par toute valeur possible, est l'expression simple d'une telle totalité qualitative. Par exemple, le chemin d'un point à un autre dans l'espace est conçu comme passage continu, si la totalité des points intermédiaires est conçu comme déterminée qualitativement et non quantitativement sous une loi quelconque (identité de direction ou variation définie de direction).

10. Le procédé par lequel on pose la grandeur est,

comme procédé, unique, mais il suffit pour la position de grandeurs infiniment variées entre lesquelles de nouvelles relations sont pensables, et, en tant qu'elles doivent coexister dans une seule connaissance, ces relations doivent nécessairement être pensées. Il faut donc un nouveau procédé pour soumettre ces relations à une loi. Un tel procédé ne peut pas sortir d'une simple synthèse (celle-ci est épuisée par les deux procédés inséparables de la quantité et de la qualité), mais d'une synthèse de synthèses. Son rôle est d'ordonner l'un d'après l'autre, d'où résulte un système d'ordres, c'est-à-dire *un* ordre total. C'est ce qui correspond à la « relation » kantienne.

11. Comme ce procédé repose, lui aussi, sur une synthèse, il est soumis à une gradation analogue à celle de la quantité et de la qualité. Son rôle est, nous l'avons dit, d'établir l'ordre non seulement entre les termes d'une série (ce que font la quantité et la qualité), mais entre des séries de séries, dans les termes correspondants, et finalement entre un système de séries. La possibilité d'un ordre de ce genre exige d'abord une série de comparaison fixe comme fondement de tout l'arrangement. Comme le premier postulat du procédé quantitatif est l'unité comme principe quantitatif et par suite comme mesure ou moyen de détermination de la multitude, comme le premier postulat du procédé qualitatif est l'identité comme principe qualitatif et par suite comme

fondement de comparaison de la diversité qualitative, de même le premier postulat d'un arrangement par séries est une série type, qui serve pour tous les arrangements demandés de mesure commune, unique, identique, uniforme et continue, par suite la construction d'un système de lieux, d'une échelle où le cours de chacune des variations comparées s'inscrive pour ainsi dire. On verra ci-dessous (§§ 3 et 4) que c'est cette nécessité qui introduit les concepts du temps unique absolu, de l'espace unique absolu, et aussi du mouvement rectiligne uniforme comme dernière mesure du changement dans la nature, et par là on satisfait à l'exigence intellectuelle de la stabilité comme fondement de toute détermination du changement (substantialité). Mais ici il ne s'agit que du postulat général d'un arrangement en série de grandeurs, valable aussi pour l'usage purement mathématique.

12. En second lieu, il faut une loi d'après laquelle une série de changements quelconque puisse s'ordonner terme à terme suivant une autre, c'est-à-dire qui détermine la correspondance de terme à terme pour la nouvelle série d'après celle qui a été adoptée pour une série antérieure; ce qui implique correspondance entre les indices des termes des différentes séries $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ et les degrés de l'échelle ou série type. En tant qu'on a égard ici à la loi de transformation de terme à terme, on a la base de l'exigence logique de la causalité ou liaison successive (cause = antécédent régulier). Pourtant il ne

s'agit ici encore que de la possibilité d'un ordre en série de grandeurs en général, c'est-à-dire du concept général de fonction.

13. Mais le rapport régulier de série à série n'est fondé qu'insuffisamment, tant que le postulat de la correspondance régulière terme à terme n'est étendu qu'à une pluralité arbitraire et fortuite, et non à une totalité de séries de changements donnée par quelque définition que ce soit. Bien plus, la série fondamentale elle-même et, par suite, tout ordre particulier qui la suppose serait incomplètement déterminé. Ainsi la première et la deuxième demande ne sont vraiment remplies qu'en admettant aussi cette troisième, savoir que la régularité du changement dans chaque série isolée soit pensée comme déterminée par une relation régulière non pas seulement à une quelconque, mais à toutes les séries de changements simultanées qui concourent à la déterminer; c'est la demande d'une continuelle et réciproque dépendance fonctionnelle ou d'un système de grandeurs, à quoi se rattache la catégorie de l'action simultanée mutuelle.

14. Ce nouveau procédé tripartite de l'arrangement en séries, envisagé comme procédé logique fondamental, donne, lui aussi, ouverture à un développement infini. Un système atteint devient à son tour principe de nouvelles séries et systèmes de séries, et ainsi de suite indéfiniment. Comme but dernier on a pourtant en vue l'ordre

unique final de ce qui existe. Cet ordre est postulé par le concept complètement déterminé de l'être : être au sens le plus large signifie n'importe quelle détermination de la pensée, être au sens strict ou existence signifie une détermination complète qui suppose à sa base un système ou ordre unique en vue duquel chaque individu est déterminé. Le procédé de l'arrangement en séries, dans son extensibilité infinie, rend possible une détermination progressive vers ce but infiniment lointain d'un ordre unique des existences. Cette exigence de l'unité fait la séparation entre les mathématiques et les sciences naturelles. Elle seule différencie une nature comme ensemble dynamique universel et par suite unique, d'un système, quel qu'il soit, de relations mathématiques abstraites. La pensée mathématique est purement méthodique, bien qu'applicable objectivement, car la méthode qu'elle développe est celle de penser l'objet en général. Mais c'est seulement la pensée conforme à cette exigence de l'unité de la détermination qui est pleinement la pensée objective, pensée non pas d'un objet possible en général, mais *de* l'objet réel¹. Que la connaissance de l'existence

1. Même les degrés de modalité de la connaissance se laissent déduire en un sens purement mathématique, c'est-à-dire indépendamment de l'exigence de l'unité de la détermination; on obtient de la sorte des significations purement mathématiques du possible, du réel et du nécessaire différentes de leurs significations dans la pensée de l'objet naturel. Il suffit d'ailleurs, au sujet de la modalité, de faire remarquer qu'elle ne représente pas une nouvelle forme primitive ou une nouvelle direction de la synthèse, mais qu'elle donne une expression systématique à la marche graduelle de la synthèse en général, et par cela au caractère progressif de la connaissance. Son impor-

devienne ainsi une tâche infinie, c'est ce qu'il fallait attendre du caractère général de la connaissance synthétique. Il n'y a pas moyen d'échapper à ce fait. Pour l'existence de l'objet pensé (après qu'on a dû abandonner à la pensée la question de son essence), s'en référer au donné (expérience, perception, enfin sensation) serait vain. Le donné doit être pensé, et l'on ne pense dans l'existence donnée, l'expérience, la perception ou la sensation que cette complète détermination que la pensée seule peut fournir (d'après le procédé de la relation sur la base de la quantité et de la qualité), mais ne peut jamais fournir définitivement. Ce n'est pas l'objet (expérience, perception, sensation) qui donne la liaison déterminée des pensées, mais celle-ci qui d'après les lois de la relation détermine l'objet et donne par là à l'expérience (perception, sensation) un contenu déterminé.

§ 2. — *Le nombre.*

15. La première expression scientifique du procédé purement quantitatif est la numération, l'expression générale du quantum est le nombre, conçu d'abord comme nombre naturel, c'est-à-dire entier absolu. Comme tel, le nombre n'est pas une grandeur au sens défini plus haut (9).

tance n'est pas pour cela petite, elle sert de base à des concepts instrumentaux aussi puissants que ceux de l'hypothèse et de la preuve, de la preuve inductive ou constructive, et de la preuve déductive.

16. La construction de la suite naturelle des nombres se comprend par les lois du procédé quantitatif. Comme pure expression du procédé pris en lui-même et généralement, elle est — nécessaire et universelle — unique et la même dans toutes ses applications — indéfiniment prolongeable, car le procédé qui la fonde a des ressources illimitées (6) — homogène, car ses termes d'après leur détermination même ne sont que des numérateurs et tous produits également par juxtaposition, ils ne se distinguent donc pour la pensée par aucun autre signe que leur rang dans la série ; de plus chaque terme de la série enveloppe cette série tout entière, puisque le procédé de la numération est déterminé dès le commencement et conséquemment à partir de n'importe quel terme donné par une régression vers le commencement ou une progression à l'infini ¹.

17. Les modes simples de calcul d'abord dans le domaine des nombres entiers absolus, ressortent directement de la considération des rapports donnés entre les nombres et ne font que soumettre ces rapports à une connaissance méthodique. Il s'agit ici d'un être, non d'un acte. Les mathématiques n'agissent pas, elles contem-

1. Cf. G. F. Lipps, *Unters. üb. d. Grundlagen der Mathematik*, *Wundt's Philos. Stud.*, t. XI, 268 sqq. — Pour comprendre clairement cette prédétermination de chaque terme de la suite infinie des nombres, il faut un système de numération décimal ou autre, c'est-à-dire un système fini de signes par lesquels, une fois qu'on a défini leur signification et leur usage, chaque nombre a son expression déterminée jusqu'à l'infini. La position d'un tel système (qui présuppose les règles simples du calcul) a donc un fondement logique et n'est pas un pur moyen mnémonique.

plent; leurs objets ne se laissent pas modifier ou écarter, augmenter ou diminuer, unir ou séparer, multiplier, diviser, transformer ou supprimer; ils *sont* seulement, dans une invariable détermination; mais du fait qu'ils sont, ils se rapportent d'une manière quelconque les uns aux autres et le développement complet de ces rapports est le sens purement scientifique du calcul.

18. Addition. J'appelle $+ 1$ « l'unité comptée à partir d'un point de départ donné ». Le point de départ d'une numération s'appelle zéro et est désigné dans notre système de chiffres par le signe 0. Mettre le zéro au point de départ de la numération absolue, c'est dire qu'on ne part de rien, qu'on ne suppose rien, qu'on se met simplement à compter. Ensuite le 1 de la suite naturelle s'exprime par $0 + 1$, 2 par $0 + 2$, et ainsi de suite. Mais on peut aussi prendre comme point de départ un nombre quelconque d'une première numération, par exemple prendre 1 comme un zéro relatif et compter à nouveau à partir de ce nombre (avec 1, 2, etc.). C'est là le concept de $1 + 1$, $1 + 2$, etc. (c'est-à-dire qu'on compte 1, 2 à partir de 1 comme d'un zéro relatif), en général le concept d'une somme. L'équation numérique $1 + 1 = 2$, ou, plus complètement,

$$1 + 1 = 0 + 2 \quad (1)$$

signifie donc qu'il revient au même de compter un à partir de l'unité d'une première numération envisagée

comme zéro relatif, ou deux à partir du commencement de la première numération c'est-à-dire du zéro absolu. C'est logiquement tout différent, mais numériquement ce sont deux modes équivalents et échangeables. Déjà cette première équation, et il en est de même de toutes les autres, affirme la substitution de termes équivalents, mais non identiques.

19. Soustraction. D'après ce qui vient d'être dit, la situation relative de deux nombres quelconques est exprimable par la situation équivalente d'un certain nombre par rapport à zéro. C'est le rapport arithmétique à l'expression duquel sert le signe —; nous l'appelons rapport de position, c'est le correspondant du second degré de la quantité (5, b). $1 + 1 = 2$ signifie, nous l'avons dit, on va de 1 à 2 en comptant 1 à partir de l'unité comme zéro relatif, c'est-à-dire de la même façon qu'on va de 0 à 1. C'est cette même équivalence des rapports de 2 à 1 et de 1 à 0 qui s'exprime directement par l'équation

$$2 - 1 = 1 - 0 \quad (2)$$

laquelle a donc, sous une autre forme, le même contenu que l'équation (1).

On voit donc qu'à la progression arithmétique correspond une égalité additive entre les sommes des moyens et des extrêmes.

20. La soustraction au cas où le second nombre est plus grand que le premier résulte immédiatement pour

nous de la considération de ce fait qu'un rapport est par définition réciproque et que son expression peut par suite s'intervertir. Le contenu des équations (1) et (2) peut donc aussi s'exprimer par l'équation

$$1 - 2 = 0 - 1 \quad (3)$$

Ce qui est l'expression la plus directe de ce fait qu'on va de 1 à 2 de la même manière que de 0 à 1. On définit alors $1 - 0 = + 1$ (ce qui est d'accord avec l'explication donnée plus haut de cette expression [18]), $0 - 1 = - 1$ (car 0 est le point de départ sauf convention contraire), et l'on obtient le nombre positif et négatif (plus ou moins un), et, comme fondement de comparaison du plus ou du moins, par suite comme limite entre les nombres positifs et négatifs, le zéro relatif (± 0). Comme expression générale du procédé de la numération relative, on peut maintenant, avec le nombre positif, le zéro et le nombre négatif construire la série relative des nombres. Elle progresse dans les deux sens à l'infini, car la possibilité de la numération relative est aussi illimitée que celle de la numération absolue.

21. La déduction de la multiplication et de la division est exactement parallèle à celle de l'addition et de la soustraction. Leur fondement est ce rapport à l'unité numérique qui est posé en même temps que chaque nombre, savoir que c'est avec l'unité que l'on compte : compter c'est seulement juxtaposer les unités; deux,

c'est deux unités, ce qu'on écrit : 2.1 ; et ici 1 n'est pas le premier rang de la suite des nombres, mais bien l'unité fonctionnelle absolue avec laquelle on compte. Ainsi dans la multiplication l'unité apparaît avec une double fonction : elle compte et elle est comptée. A son tour le nombre deux est aussi une couple (1.2), c'est-à-dire qu'on peut aussi compter avec lui comme avec une unité relative nouvelle : une couple, deux couples, etc. L'unité avec laquelle on compte a de la sorte, comme le zéro à partir duquel on compte, une signification absolue et une signification relative. D'après cela, l'équation $2.3 = 6$ (c'est-à-dire $= 6.1$) exprime qu'en comptant deux avec le nombre trois pris comme unité relative, ou six avec l'unité absolue originaire, on arrive au même résultat ; ce qui ne veut pas dire que ce soit logiquement la même chose, mais que ce sont des modes opératoires équivalents, par suite échangeables ; là où l'un est possible, l'autre l'est aussi. Par là on a déjà ce qu'on appelle la proportion géométrique ; nous préférons l'appeler proportion métrique, elle correspond au troisième degré de la quantité (5,c). En effet, le fait énoncé plus haut peut aussi s'exprimer comme suit : comme 2 est à 1, 6 est à 3 ($6 : 3 :: 2 : 1$), et ce rapport peut aussi s'invertir en $3 : 6 :: 1 : 2$, ce qu'on peut lire directement : on va de 3 (pris comme unité relative d'une nouvelle numération) à 6 en comptant $2. 1/n$ comme valeur inverse de $n/1$, le concept de n fois plus, n fois moins

s'obtient en partant de là. Il n'y a pas à parler de multiplication ou de division des nombres : nous multiplions et divisons nos opérations, mais les nombres ne se séparent ni ne s'unissent pour produire une progéniture; mais ils sont, et avec eux sont donnés leurs rapports.

22. On prouve que les nombres relatifs, aussi bien sous le rapport de la mesure que sous celui de la situation, se comportent à leur tour comme les nombres absolus primitifs, que par suite les modes de calcul leur sont applicables, sous certaines règles, entre eux comme aussi dans leur liaison avec les nombres absolus. Il ne faudrait pas dire qu'ils représentent une extension *artificielle* du système des nombres absolus ou *naturels*, car ils se contentent de développer complètement le contenu méthodique déjà inclus dans les derniers. La relativité est le caractère fondamental du nombre, car elle est celui de la pensée synthétique. Le zéro et l'un absolus ne sont que le moyen de prendre pied dans l'infini des relations en général. La position absolue est provisoire, la position relative est définitive.

23. De la genèse du nombre fractionnaire et négatif il faut séparer tout à fait celle du nombre irrationnel et imaginaire. Au premier cas, on transporte simplement la fonction de l'unité à une multiplicité déterminée, au second celle du zéro à un rang donné de la série primitive des nombres, mais tous les rapports de mesure et de situation demeurent indépendants de ce changement du

point de départ, qui est clairement fondé sur la relativité du procédé numérique. Au contraire, avec le nombre irrationnel, on met dans un rapport métrique avec l'unité donnée une multiplicité qui n'est pas donnée dans la série primitive, mais qui est nouvellement élaborée; avec le nombre imaginaire on met dans un rapport de situation avec le zéro de la série primitive, un rang situé absolument en dehors de cette série, rapport qui, lui aussi, n'est pas donné, mais dont l'introduction élargit singulièrement le concept supposé jusqu'ici des rapports métriques ou de situation. La question se pose de savoir comment justifier logiquement une telle transgression de concepts. Elle est justifiée par le fait que la pensée est autorisée à dépasser toute limite qu'elle s'est imposée elle-même (9), à condition que ce progrès soit continu, c'est-à-dire que les nouvelles démarches puissent être effectuées par une extension méthodique du même procédé qui a servi pour les premières; ce qui veut dire dans notre cas que la loi de formation des nombres réels et rationnels doit pouvoir se subsumer comme un cas particulier à celle des nombres irrationnels et imaginaires. L'expression technique de cette extension est le nombre *général*. Comme le passage du nombre à la grandeur (9) est étroitement lié à ces extensions, il faut s'y arrêter.

24. Grâce au caractère relatif de la relation métrique $n : 1$, on peut multiplier indéfiniment les places situées dans un intervalle donné, par exemple de 0 à 1. Mais

comme les places multipliées se comptent toujours par les mêmes nombres primitifs (avec cette seule différence que la signification métrique change avec le choix de l'unité), le rapport de position de 0 à 1, à 2, etc., reste toujours invariable, entre 0 et 1 il n'y a place pour aucune intercalation. L'ordre de situation ainsi formé est bien inépuisable par le nombre de ses termes, mais par sa définition il est complètement déterminé; c'est un système fermé, non susceptible d'extension sur les principes admis jusqu'ici. Il est pourtant possible d'ajouter à une numération de ce genre une autre numération dont la constitution formelle serait la même, mais dont l'unité n'est mesurable par aucun nombre du premier système; d'où suit qu'entre deux nombres quelconques de ces énumérations différentes des relations métriques n'ont pas lieu. On nomme les nombres de deux pareils systèmes différents par le choix des unités *incommensurables* les uns par rapport aux autres, ou *irrationnels* l'une par rapport à l'unité de l'autre, tandis que tous les nombres d'un seul des systèmes décrits sont dits commensurables entre eux ou rationnels par rapport à leurs unités. Il suit de là que deux numérations incommensurables ne peuvent avoir plus d'un terme commun. Qu'on prenne pour chacune d'elles ce terme comme 0, puisque dans chacune d'elles le zéro est déplaçable, le théorème alors s'exprime ainsi : Deux numérations incommensurables n'ont aucun terme commun excepté de 0. Toute équiva-

lence entre nombres de deux numérations incommensurables est donc exclue. Les concepts admis jusqu'ici du plus et du moins ne sont pas non plus applicables à de semblables numérations, car le plus et le moins ne signifiaient jusqu'ici que la situation relative dans une seule et même numération complètement définie comme plus haut. Comme pourtant au moins le 0 des deux numérations est supposé commun, il faut aussi que les deux séries de plus et de moins des deux systèmes coïncident. Mais alors, quoique aucun nombre de l'une des numérations ne recouvre exactement un nombre de l'autre, pourtant l'on peut concevoir ce rapport d'un terme quelconque ν de la deuxième numération à l'ensemble des n , savoir que ν , tout en ne se trouvant lui-même à aucun rang dans la série des n , divise cette série de telle sorte que chaque terme de la première partie précède chaque terme de la seconde dans la numération qui part de 0. Alors ν ne correspond toujours à aucune place de la série des n , mais à la coupure; non à un rang, mais à une séparation de rangs.

Cela posé, les concepts du plus et du moins, qui jusqu'ici n'exprimaient que ce qui est compté en avance ou en suite d'un certain rang d'une série unique, admettent cette extension que, si ν correspond à une coupure de la série des n , on dit de tous les nombres n tombant d'un côté de la coupure, qu'ils sont plus petits, de tous ceux tombant de l'autre côté, qu'ils sont plus grands que ν . Les rela-

tions générales valables pour les nombres rationnels qui existent entre le plus et le moins (par exemple que le plus additionné au plus ou multiplié par le plus fait le plus), subsistent après cette extension. De cette façon une valeur ν ne se détermine pas par une équation, mais par un système d'inégalités se rapportant aux nombres rationnels, et conformément à cette détermination il est possible de placer cette valeur dans toutes les relations, même métriques, avec les nombres rationnels. Il faut seulement encore établir la condition sous laquelle cette détermination (admise jusqu'ici seulement comme possible) a lieu effectivement pour n'importe quel nombre donné ν . Cette condition à ce qu'il semble, ne se laisse pas énoncer d'une manière exhaustive et positive. Pourtant dans un cas simple, celui des racines irrationnelles, la raison de la déterminabilité est facile à voir : ici le nouveau rapport $\nu : 1$ est obtenu par la division égale du rapport métrique fondamental en termes rationnels $n : 1$, c'est-à-dire conformément à une proportion $1 : \nu = \nu : \nu^2 = \dots$, où le dernier terme, par exemple, ν^2 , coïncide avec une valeur rationnelle ; en d'autres termes, le rapport métrique nouveau $\nu : 1$ est supposé jouir de la propriété que sa simple répétition ramène à un rapport rationnel donné $n : 1$. La valeur ν est unique, cela ressort immédiatement de ce que si l'équation $x^m = n$ (où m et n sont des nombres rationnels absolus) avait deux racines réelles distinctes, le plus multiplié par le plus

(et encore par le plus et ainsi de suite) ferait l'égal, ce qui a été exclu aussi pour les valeurs irrationnelles. Mais la valeur elle-même de la racine n'est déterminable ici comme ailleurs que par une série d'inégalités, savoir qu'on peut dire de tout nombre rationnel s'il est plus petit ou plus grand que la valeur en question.

Si l'on introduit en même temps que le nombre irrationnel ou pour le fonder le principe de la continuité du nombre, il ne faut pas le faire sans restriction. Ou bien on fonde l'hypothèse de la continuité sur l'*intuition* en faisant correspondre, par une convention arbitraire, à chaque point d'une droite un nombre, ou bien l'on introduit directement la continuité dans le nombre, en supposant qu'à chaque coupure du système rationnel correspond une irrationnelle. Dans les deux cas il faut dire que la totalité des nombres qui peuvent être posés en correspondance avec les places non déterminables rationnellement, n'est pas donnée par une définition positive et exhaustive; il reste à déterminer ce qu'il faut entendre par l'*ensemble* des valeurs d'un intervalle donné. Sans doute cela signifie : tous les nombres possibles, sans aucun concept de limite infranchissable. Ceci est admissible, mais seulement si l'on ajoute une détermination positive de nature qualitative, celle de la direction. On fera voir dans quel sens une telle détermination est possible même pour le nombre pur.

25. De même que la relation métrique $n : 1$ reste inva-

riable par changement d'unité, de même la relation de situation $n - o$ par déplacement du 0. Un rapport nouveau au zéro n'est concevable que dans une numération nouvelle, qui ne peut avoir de lien avec la première que la communauté du zéro. Mais les valeurs positives de l'une ne correspondront pas aux valeurs positives de l'autre, les valeurs négatives aux valeurs négatives ; cependant on peut concevoir — et d'abord on ne peut que concevoir — une inversion des deux sens, de façon que les valeurs positives de l'une correspondent aux valeurs négatives de l'autre et vice versa. L'expression de ce fait dans le calcul est fourni par le changement de signe dans les opérations métriques ; ce changement est en effet indépendant de ces opérations : les mêmes valeurs numériques, donnent dans toutes les opérations métriques, les mêmes valeurs numériques abstraction faite du signe ; le signe du résultat se calcule d'après le signe des données, en remarquant qu'un signe moins signifie une inversion de la direction fondamentale dans la direction opposée ou vice versa, le signe moins s'ajoutant au signe moins est l'inversion d'une inversion, par suite le retour à la première direction. Il correspond donc au passage de la direction R_0 à la direction R_1 ou vice versa, où R_0 est la direction fondamentale de o vers les quantités positives, R_1 la direction opposée vers les quantités négatives, une multiplication par -1 . Par là sont déjà donnés deux genres de relations au zéro (directions), et aussi le pro-

cédé d'un changement (d'abord d'une inversion) de ces relations (changement de direction). Ce changement de direction peut se répéter indéfiniment, et l'on obtient ainsi une série $R_0, R_1, R_2, \dots$ exprimable par la série des puissances de -1 , $(-1)^0, (-1)^1, (-1)^2, \dots$ et infinie comme elle dans les deux sens si l'on a égard aux changements régressifs. Pourtant en fait ce sont toujours les deux mêmes directions R_0 et R_1 qui reviennent, car ce sont les seules qui aient été présumées jusqu'ici. D'où suit que toutes les puissances paires de (-1) sont égales à $(+1)$, les puissances impaires à (-1) . Mais après qu'on a défini deux directions et un procédé de changement de direction en général, on peut par une création de la pensée poser un plus grand nombre de directions. Et l'hypothèse qui se présente d'abord après ce qui est déjà donné, est la division par parties égales de l'unique changement de direction donné de R_0 en R_1 , exprimable arithmétiquement par $(-1)^{1/2}$ ou $\sqrt{-1}$, géométriquement par la rotation de 90° , moitié de celle de 180° . L'usage de l'expression de la moyenne proportionnelle empruntée aux relations métriques a un double fondement : d'abord, la proportion métrique et la proportion de direction tombent toutes deux sous le concept général de la proportion comme répétition de la même relation : de même que dans la multiplication métrique on compte des comptes, de même, dans la multiplication des signes, des signes plus et moins sont mis en plus ou en moins (la

série des puissances de (-1) est la répétition indéfinie du signe moins, etc.). En second lieu, dans l'élévation aux puissances de nombres munis de signes, se trouve à la fois la répétition du même changement métrique et celle du même changement de direction. Il n'y a donc rien d'innové dans l'emploi du signe $\sqrt{-1}$, il n'y a de neuf que l'hypothèse d'une direction de nombres différente des directions positive et négative, mais qui se relie à chacune d'elles d'une façon définie, et pour laquelle, une fois qu'on l'a admise, cette désignation seule répond aux autres usages des signes. Qu'on s'en tienne à la seule unité imaginaire $i = \sqrt{-1}$ (autrement on obtiendrait les différentes racines de l'unité correspondant à une division quelconque du cercle), cela se fonde sur le fait qu'un changement de direction est essentiellement circulaire. Déjà le passage de R_0 à R_1 est en un certain sens retour à la direction fondamentale, car R_1 est donné avec R_0 et ne s'en distingue que dans la pensée ; de même $R_{\frac{1}{2}}$ signifie le plus grand écart de direction avec R_0 , R_1 , et au moyen de ces deux directions considérées comme coordonnées, c'est-à-dire à l'aide du nombre complexe ordinaire, on peut exprimer toutes les places qui se comptent à partir du même o dans toutes les directions du continu à deux dimensions. Les analogies géométriques, qui s'imposent ici inévitablement, sont fondées en fait, non qu'on transporte au domaine du nombre les concepts de l'intuition, mais parce que la pensée répond avec ses propres moyens

aux exigences de l'intuition. Des systèmes de nombres supérieurs sont possibles, mais n'ont, de l'aveu des mathématiciens, qu'un intérêt technique. Les modes nécessaires et suffisants du nombre, comme expression méthodique du procédé quantitatif-qualitatif, et comme base de la relation (sous forme de fonction), sont épuisés par ce qui précède.

§ 3. — *Le Temps.*

26. Les lois du temps et de l'espace résultent des lois de la grandeur par l'adjonction de la condition d'une détermination complète d'un ordre unique unissant toutes les directions possibles de la grandeur. C'est cet ordre unique que Kant avait en vue lorsqu'il distinguait le temps et l'espace, comme intuitions des purs concepts, et leur assignait une place non dans la logique, mais dans l'esthétique transcendantale. Mais ce ne sont pas pour lui des objets, ce sont des modes originaires de l'intuition (la dissertation de 1770 dit expressément : des lois); ce sont des manières dont le multiple des phénomènes s'unit suivant certains rapports, les rapports de succession et de simultanéité. Donc la fonction de l'intuition consiste à ordonner suivant certains rapports. Par là l'intuition se rapproche beaucoup de la pensée, particulièrement de la pensée de relation, qui est aussi une fonction d'ordre et poursuit aussi un ordre unique. De plus,

l'intuition doit, à la différence du concept, être une représentation immédiate, non médiate de l'objet; il doit être donné par elle et pas seulement conçu; les objets sont représentés dans le temps et l'espace et pas simplement sous eux comme signes communs. Mais au sommet de la méthode critique, rien n'est donné séparément de la pensée, ce ne peut être qu'une fonction primitive de pensée par qui l'objet peut d'abord être donné. C'est ce que dit expressément une remarque de la 2^e édition de la *Critique de la Raison pure* (§ 26) : c'est d'abord par une synthèse « qui n'appartient pas aux sens », mais où « l'entendement détermine la sensibilité », que l'espace et le temps sont donnés comme intuitions. On ne fait donc que tirer la pleine conséquence des propres prémisses de Kant, quand on dit que les déterminations d'espace et de temps sont toutes sans exception des déterminations de la pensée, d'une part des déterminations de grandeur, pouvant se déduire des lois de la synthèse quantitative-qualitative, d'autre part des déterminations de relation dont le but est cette détermination de la synthèse quantitative-qualitative qui complète le concept d'objet mathématique par celui d'objet naturel. C'est précisément pour cela que l'espace et le temps sont les conditions fondamentales de la détermination de l'existence dans l'expérience; car existence signifie justement la complète détermination de l'objet pensé, ce qui est le but de toute détermination de l'objet conformément aux

catégories. Et pour la même raison l'espace et le temps apparaissent aussi comme ordres des sensations, car la sensation, le dernier témoin de l'existence, n'est que l'expression la plus déterminée de l'exigence d'une détermination dernière. Sur ce fondement on peut déduire sans exception les déterminations mathématiques du temps et de l'espace d'une part, leurs déterminations réelles d'autre part, qui les différencient de purs concepts.

27. Le temps représente en dernière analyse la « discrétion » ou pour ainsi dire l'accentuation de l'être, plus complètement : l'ordre de la discrétion. Elle affirme l'extériorité des éléments dans la conscience, car chacun y est posé comme pour soi, dans une conscience particulière, et par suite discrètement, et en même temps dans un ordre déterminé, l'un après l'autre, c'est-à-dire chacun à sa place dans une série successive. Mais cela même est directement numération, dont le concept est contenu aussi dans celui de la succession (c'est-à-dire l'un après l'autre, premier, second, etc.). Et si cela semble être une observation purement psychologique que la numération inversement est toujours une succession — le concept du nombre en fait n'implique pas succession mais s'étend aussi bien au simultané, — au moins est-il vrai que le seul caractère distinctif de la succession, savoir que l'arrivée du terme suivant efface l'existence du précédent, que les moments du temps s'excluent par suite dans l'existence, affecte non les déterminations purement ma-

thématiques, mais les déterminations réelles du temps. Quant aux premières il n'y a pas de différence, tous les attributs de la série linéaire des nombres réels sont aussi applicables au concept de temps.

28. Le temps partage avec le nombre la propriété d'être unique (16), infini, homogène; chaque terme de la série enveloppe ici encore la série entière; chaque point du temps est déterminé par sa relation à ce qui précède et ce qui suit, et ainsi à l'infini. Au zéro comme point de départ absolu de la numération correspond le présent comme point de départ également absolu de la durée; mais on peut aussi compter ou décompter la durée à partir de n'importe quel point du temps envisagé comme zéro relatif, c'est-à-dire comme présent. Compter ou décompter, car, comme le nombre à partir du zéro absolu ou relatif, ainsi le temps, à partir du présent absolu et de tout présent relatif, court bien dans une direction unique en soi; ce n'est pas le cours du temps que la régression intervertit mais son contenu : on place le contenu dans la même suite 1,2.... mais dans l'ordre inverse; pourtant avec la direction fondamentale est donnée en même temps la direction opposée, en ce sens que tout rapport peut être renversé. Par contre, une pluralité de directions, qui donnerait application au nombre complexe, a aussi peu lieu lorsqu'il s'agit du temps qu'une inversion réelle dans sa direction. Il serait inexact d'appeler la simultanéité une deuxième dimension du temps :

deux temps ne pouvant être simultanés, car le simultané est ce qui se passe dans un même temps. On pourrait noter cette différence, que tous les modes temporels qui sont toujours discrets peuvent et doivent toujours être pensés comme ayant à leur base le temps lui-même comme support unique et continu. Mais dans le même sens le continu numérique lui aussi, comme genre, se place au-dessus de tous les modes numériques qui sont toujours « discrets » et n'épuisent jamais « le » nombre lui-même, c'est-à-dire la possibilité générale d'une numération. On peut aussi dans le continu du temps délimiter des étendues, les ajouter, retrancher, multiplier et diviser à l'infini. Par suite la mathématique du temps coïncide à tous égards avec celle de la série linéaire et continue à une dimension. C'est pour cela qu'il n'y a pas de mathématique propre du temps, comme il y en a une de l'espace.

29. Si le temps, avec ces déterminations mathématiques, le temps absolu *mathématique* de Newton, qui « fluit æquabiliter », existe réellement; c'est là une question mal posée. Elle ne signifie pas une existence, mais une mesure de la détermination de l'existence; ce n'est que l'existence déterminée dans le temps unique absolu qui serait absolument déterminée. Car existence veut dire détermination complète, détermination de l'objet d'une manière absolument unique, qui implique comme première condition la détermination dans un

ordre temporel absolument unique. Mais la détermination réelle de l'objet de l'expérience n'est possible que relativement, et par suite elle peut et doit se faire avec des déterminations de temps purement relatives, lesquelles pourtant se rapprochent indéfiniment des absolues par le progrès de la connaissance. Le temps absolu est donc un concept-limite, indispensable pour l'expression de la méthode de la connaissance naturelle; ce n'est pas le concept d'un objet de la nature qui soit donné ou à démontrer encore comme existant, ce n'est pas non plus une détermination d'existence d'un objet naturel donné ou encore à démontrer comme existant. Si l'on peut se rendre compte en ce sens de l'« idéalité » du temps, on en sera peut-être moins choqué ou l'on dirigera contre elle moins d'attaques désorientées. Établir une solidarité fonctionnelle unique du devenir, c'est le problème posé par le concept de l'existence, par le sens même de cette affirmation : *quelque chose est*, c'est-à-dire est pleinement déterminé dans la pensée. Cette solidarité mesure d'abord ce qui devrait la mesurer, le temps. C'est ce que voit l'empiriste, pour qui la détermination d'un laps de temps n'est donné que par la détermination d'un laps du devenir, laquelle est conditionnée par la solidarité fonctionnelle des séries de changements parallèles. Il ne voit pas que cette solidarité est inévitablement posée comme unique, quoique hypothétique, sous réserve constante de la correction relative à tout ce qu'il y a de particulier

dans l'arrangement temporel; que par suite en vertu de la même nécessité transcendentale, il faut poser le temps comme unique, donc comme absolu, et cela *a priori*, car, comme on l'a dit avec grande raison, ce temps unique et absolu n'est pas et ne peut pas être donné. Le criticisme, d'après la conception ici exposée, ne fait donc qu'enchérrir sur le relativisme, lequel tire le bon grain de l'empirisme, lorsqu'il dit : Cette théorie est encore erronée lorsqu'elle regarde comme absolument déterminée la série ou les séries particulières plus ou moins nombreuses de changements, qu'on a réussi jusqu'ici à mettre en liaison fonctionnelle; lorsque avec cela elle fait l'hypothèse d'un temps particulier réellement existant pour toute solidarité limitée de séries déterminées, — « le temps est l'angle horaire de la terre », dit un empiriste; au lieu de cela le criticisme considère, dès le début, toute uniformité supposée de séries de changements, par suite tout temps supposé donné, comme purement hypothétique, et ne peut obtenir comme résultat de nombreuses hypothèses de ce genre qu'une hypothèse fondée sur une base plus large, analogue aux approximations successives d'une série infinie. Mais il affirme qu'en opposition à cette infinité de valeurs approchées, il est méthodiquement nécessaire de penser la valeur limite, qui par là est en même temps limite de la détermination d'existence. Nier cela, ce serait nier le concept d'existence, c'est-à-dire le problème de la connaissance et de l'expé-

rience. C'est là le sens de la thèse : le temps n'est pas une détermination de l'objet en soi (c'est-à-dire d'un objet qui serait déterminé absolument), ce n'est qu'un moyen méthodique de détermination de l'objet dans l'expérience (objet qui ne peut jamais être déterminé absolument). On cherche en vain ce qu'un empirisme conscient de lui-même voudrait ou pourrait opposer à une thèse semblable, qui met si bien en valeur ses propres droits.

30. Les moments du temps s'excluent dans l'existence, c'est-à-dire la série des existences dans le temps doit être construite de façon qu'à un point unique du temps ne puisse être assigné qu'un seul moment de l'existence, à l'exclusion de tous les autres; comme dans la numération un terme identique n'est compté qu'une fois et à un nombre identique ne peut être assigné qu'un seul terme de la série. L'ordre temporel est pour ainsi dire la numération (sériation, arrangement) de l'existence où chaque place individuelle ne peut être occupée qu'individuellement.

31. Mais comme le temps, comme pur arrangement, ne peut être donné que dans et par son contenu, il faut que l'ordre temporel s'exprime dans un ordre du devenir qui le représente purement, donc dans un devenir qui soit posé comme uniforme (égal dans des temps égaux). Mais la détermination de n'importe quelle série de changements comme uniforme n'est possible à son tour que

sur le fondement d'une liaison régulière de séries différentes se correspondant terme à terme. Car c'est seulement à l'aide d'une correspondance de ce genre (relation fonctionnelle) que l'ordre des événements dans les séries individuelles peut se déterminer d'après la succession et la simultanéité (loi de la succession et de la simultanéité comme construction du cours temporel objectif des événements selon l'idée directrice de Kant, voir Crit. de la R. P., Analogies de l'expérience). La preuve se tire des lois de la relation (11-13).

§ 4. — *L'espace.*

32. Comme le temps, l'espace n'est qu'un ordre de situations et comme tel il peut se déduire des lois du nombre dans ses déterminations mathématiques. D'où vient cette dualité dans l'ordre des situations, dualité que le nombre ignore, et d'où viennent, à côté de concordances nombreuses dans les principes, les divergences dans le détail? Les places du temps sont successives, celles de l'espace sont simultanées, les unes s'excluent dans l'existence, les autres se conditionnent et se supposent mutuellement. Ceci ramène à la différence fondamentale : la représentation du temps est une séparation dans la conscience, celle de l'espace est l'appréhension de ces éléments, séparés d'abord, dans le tout d'une représentation unique, c'est une union d'éléments

qui implique une relation mutuelle déterminée entre ces éléments. Une multiplicité spatiale ne peut donc être pensée comme multiplicité dans la conscience que si on la parcourt successivement dans la représentation, donc si on la convertit en un cours de temps; inversement, une suite de moments temporelles, par suite le temps tout entier comme grandeur, comme unité (la durée) n'est représentable que si on la transforme en un continuum spatial à une dimension. Par là tous deux, l'espace comme représentation du simultané, le temps comme représentation du successif, restent bien différents, sans possibilité de confusion, parce que la conscience de la séparation et la conscience de l'union se conditionnent bien réciproquement, mais n'en restent pas moins, en idée, toujours très distincts. Le nombre contient en soi l'un et l'autre : extériorisation dans une série, union en un tout. Mais en tant que l'extériorisation est condition de l'union, tous les attributs qui en découlent conviendront également au temps et à l'espace, tandis que toutes les déterminations issues seulement de l'union seront propres à l'espace ou du moins ne seront applicables au temps que par métaphore consciente. Le premier trait vaut pour toutes les déterminations qui concernent la série des nombres comme un ordre purement linéaire. Ainsi toute la mathématique de la série homogène à une dimension s'applique sans changement et au temps et à l'espace, sous la forme fondamentale de celui-ci, la ligne droite.

33. Au contraire, l'espace semble faire apparaître quelque chose de pleinement nouveau dans la multiplicité des dimensions. Kant s'est dissimulé le problème, car dans son reste d'empirisme il cherche à comprendre le temps et l'espace comme des « intuitions », c'est-à-dire comme une sorte de donné. Les trois dimensions et la caractéristique particulière de l'espace comme figure orthoïde apparaît chez lui comme un pur fait, dont il n'est possible ni nécessaire de rendre compte. Mais ceci conduit inévitablement à cette conséquence, que l'espace ne pourrait être *a priori*. Pour le temps, un tel doute ne se levait pas. Pourquoi? Pourquoi ne se demande-t-on pas si entre deux instants il n'y a pas plus d'un temps ou si deux temps parallèles ne se coupent pas à l'infini? Évidemment parce qu'on ne peut que penser le temps comme unique et déterminé uniquement, et par suite comme figure linéaire et orthoïde. Mais c'est là une pure supposition *a priori*; savoir le temps est nécessairement unique parce que l'existence est unique, ou alors il faut nier toute connaissance d'objet, par suite toute expérience. Mais ne devrait-il pas suivre par là même qu'il faut se représenter un espace unique, et par suite qu'il y a nécessité de telles déterminations de cet espace unique, au lieu des nombreux espaces possibles in abstracto, qui rendent existant un seul espace parmi tous ceux qu'on peut penser? Il ne reste qu'à produire les raisons qui expliquent par quelles déterminations de l'espace cette

exigence est satisfaite. Ces raisons, Kant n'a nullement entrepris de les donner, et dans la lacune qu'il a laissée l'empirisme délogé d'ailleurs cherche de nouveau à se nicher. On n'obtient rien par des déclamations contre la géométrie non-euclidienne et ses conséquences empiriques éventuelles qui se rapportent à une nécessité d'intuition de l'espace orthoïde à trois dimensions; il faut réussir à donner une déduction stricte soit de l'espace euclidien, soit de quelque autre détermination que ce soit, valable pour l'unique espace existant.

34. Or on peut rendre compte de la possibilité générale d'une multiplicité de dimensions spatiales, opposée à l'unité de la dimension du temps. La solution en éléments simples doit, avec toute liaison, faire disparaître toute loi particulière, tout mode distinctif de liaisons. Elle ne peut garder que les éléments à unir, en tant que tels, donc avec la possibilité générale d'une liaison (car un ordre reste exigé dans la distinction), mais sans nulle détermination relative à la nature particulière de leur liaison. Ceci vaut pour la numération en tant qu'elle affirme purement une accentuation et notation uniforme, par suite un ordre des éléments; et à cela correspond à tous égards l'ordre à une dimension dans le temps. Mais sitôt que la liaison est envisagée comme telle, il faut qu'une loi déterminée de liaison soit à sa base. On arriverait ainsi aisément à la conclusion, que des liaisons en nombre infini et par suite des dimensions en nombre

infini sont à choisir, et même exigent d'être admises au même titre. Mais la possibilité de la liaison est limitée par la condition que les différents modes d'union à introduire doivent être représentés dans une liaison unique et fermée entre eux. Par là une limitation quelconque du nombre des dimensions est déjà indispensable, et même, comme la liaison systématique des existences exige que de tout élément à tout autre le passage soit déterminable par une même loi, il faut une construction telle qu'elle permette de poser les différentes directions coexistantes comme issues d'un seul centre commun, car c'est ainsi et seulement ainsi que chaque élément donné dans une même existence unique pourra, en partant de chaque autre, être atteint méthodiquement et calculé uniformément d'après une loi unique fondamentale.

35. Nous posons donc à la base, que deux éléments quelconques de l'espace déterminent un segment en longueur et en direction, de telle sorte que la longueur n'est déterminée qu'en pré-supposant déterminée la direction. Ceci admis, le concept de la droite est pour l'espace, comme pour le nombre et le temps, concept fondamental, et même avant celui de la longueur. Mais en fait il est impossible de penser une longueur comme déterminée sans la faire reposer sur l'idée de droite (comme détermination de la nature de la relation de terme à terme par la seule donnée des extrémités). La longueur d'une courbe n'est définissable que sous l'hypothèse préa-

lable d'une loi définie d'un changement continu de direction. Si l'on remplace le concept de droite par celui de plus court chemin, pour ôter au premier le caractère de notion fondamentale, on introduit un concept indéfini et qui reste indéfinissable sans cette notion. On pense alors un nombre sans direction, ce qui ne peut donner la grandeur, et la longueur doit être une grandeur.

36. Comme tout ce qui va suivre dépend de l'acceptation de ce point de départ, on nous permettra de le justifier encore en quelques mots. On demande : Pourquoi ne peut-on partir aussi bien d'une série fermée $a b a$ que d'une série ouverte, linéaire, qui ne revient pas sur elle-même? Parce que la série fermée suppose que les relations ab , ba se suivent à la fois au même sens (car elles s'enchaînent dans une suite unique) et à sens opposés (car elles se rencontrent en a et b comme $+$ et $-$). On dira que ceci peut se penser, sans cela on ne pourra pas penser un changement circulaire du tout. Mais celui-ci, en fait, n'est pensable que comme changement de direction continu ou discontinu, ce qui suppose l'identité de direction comme principe de mesure ou de comparaison. Le changement de direction n'est pas le concept logiquement premier, il n'est définissable que sous la supposition de l'identité de direction, aussi bien que l'autre suppose le même. Pour parler plus mathématiquement : une courbure $+a$ n'est définissable qu'avec l'aide d'une courbure 0 , comme le plus et le moins n'existent que par

rapport au zéro. Par conséquent des figures non-orthoïdes ne sont pensables que comme modifications de figures orthoïdes, et n'existent que si ces dernières existent, c'est-à-dire il n'existe des figures non-orthoïdes que dans des figures orthoïdes.

37. Ceci admis, on peut aisément poser une loi pour les directions issues du même zéro. Avec une direction fondamentale $0 - 1$ est d'abord donnée la direction opposée $0 - 1'$. Des directions différentes de ces deux-là peuvent être posées à partir du même point de départ, mais on ne peut les supposer plus différentes de la direction fondamentale que la direction opposée. Le changement de direction s'est déjà présenté plus haut (25) comme essentiellement circulaire. Par conséquent toutes les différences des directions issues de la même origine sont comprises entre 0 et un maximum, ou le changement de direction possible a son maximum dans le changement de direction 1 , qui correspond à une pure inversion de direction. Si l'on définit le changement continu de direction entre la direction fondamentale et son opposée comme une rotation, la rotation à son tour peut avoir une direction différente, mais il faut de nouveau poser comme base la rotation de direction identique qui définit le plan, et les changements de direction des rotations ont de nouveau un maximum 1 . Or comme cette transformation, c'est-à-dire la rotation du plan, doit à son tour s'exécuter d'une manière homogène, il en

résulte l'espace homogène à trois dimensions, c'est-à-dire l'espace euclidien. Notre principe de déduction ne mène pas à plus de dimensions. Car selon lui il ne faut introduire de nouvelles dimensions que pour rendre possible *le passage continu d'une direction à la direction opposée*. En vérité la rotation du plan a deux directions opposées entre lesquelles un passage continu est requis. Mais celui-ci n'exige pas une dimension nouvelle, car dans l'espace à trois dimensions le plan a deux rotations fondamentales (suivant deux axes rectangulaires), rotations dont chacune fournit visiblement le passage continu requis pour l'autre. De cette construction ressortent tout de suite les « axiomes » caractéristiques de l'espace euclidien : 1. Deux droites n'ont qu'un point commun (35); 2. Deux directions qui diffèrent d'une troisième du même angle et dans le même sens sont les mêmes et ne forment aucun angle. Toute construction dans cet espace peut s'effectuer à partir d'un point quelconque avec conservation des rapports métriques et angulaires, et cela à une échelle quelconque, car dans l'espace absolument homogène toute distance peut représenter toute autre. Une constante spatiale finie (ou courbure différente de zéro) est exclue, car si par chaque couple de points une droite est également déterminée en grandeur et en direction, toute mesure absolue de longueur (éloignement moindre, plus grand, ou distingué en quoi que ce soit) est impossible.

38. De l'espace pur absolu dans son rapport avec l'existence on peut dire, comme du temps pur absolu, qu'il n'est pas lui-même concept d'existence, mais seulement terme et limite de la détermination d'existence. Cela suffit à montrer l'absurdité d'une déduction empirique de la nature orthoïde ou non-orthoïde de l'espace.

39. Que les parties de l'espace coexistent, cela ne peut signifier, puisque l'espace n'a pas d'existence par soi, que la nécessité de rapporter les liaisons spatiales, en tant que liaisons, à un seul moment de l'existence, c'est-à-dire du temps (30). La suite des moments du temps doit donc s'exprimer dans une suite de liaisons spatiales, de liaisons ayant toujours le même contenu, ou en tout cas un contenu identique dans sa somme. Car le temps comme l'espace sont de purs ordres de situations, ils ne peuvent pas apporter quelque chose de nouveau ou supprimer quelque chose de réel, créer ou anéantir l'existence. Ainsi l'ordre spatial-temporel ne peut être conçu que comme changeant continuellement, savoir comme ordre des éléments de l'existence unique qui, toujours les mêmes, se remplacent dans l'espace selon le cours du temps. Par là est donné le concept de la matière éternelle et indestructible, sujette à aucune augmentation ou diminution, mais seulement à des changements spatiaux, ce concept dérive donc purement de celui de mobilité dans l'espace. Mais la permanence des éléments matériels ne peut être pensée : 1° que comme permanence dans leur état de mouve-

ment, si l'on fait abstraction de leurs changements thé-
tiques qui se déterminent entre eux par la causalité, et
2° en tant qu'ils doivent être caractérisés individuelle-
ment, comme conservation d'un facteur identique pour
chaque individu et déterminant leurs changements réci-
proques (masse). Pour le dernier point, il est difficile
d'établir une stricte nécessité logique; en effet, on ne déter-
mine qu'empiriquement la grandeur de ce facteur pour
chaque élément supposé. Le premier point au contraire
est sûrement fondé en logique. Mais on n'assure pas
par là un fait à corroborer empiriquement, on fait une
supposition nécessaire pour toute explication de la soli-
darité fonctionnelle du devenir : en vertu de cette sup-
position, c'est le changement seul de l'état de mouve-
ment, et non sa permanence, qui est à justifier par les
causes.

40. A présent, il faudrait déterminer les changements
mathématiques généraux de mouvement dans le temps
et l'espace, de façon que se distingue comme existant
réellement un seul système parmi les systèmes de chan-
gements possibles dans les seules mathématiques. En
tant que ceci réussit par des moyens purement logiques,
savoir par ceux de la synthèse mathématico-dynamique,
la science ainsi construite, la mécanique, est nécessaire-
ment la première science naturelle générale, soit dans
le sens que toutes les lois de la nature se ramènent en
dernière analyse à la mécanique, soit que tous les chan-

gements dans la nature sont soumis d'abord aux lois mécaniques, et n'obéissent aux autres que dans les limites du jeu laissé par celles-ci. Si l'on veut se faire une représentation plus déterminée de la possibilité d'une telle déduction logique de la mécanique, qu'on se rappelle les traits fondamentaux de la mécanique d'après Henri Hertz¹. L'objet de la mécanique est, d'après les « Principes de mécanique », 1894, § 308 : de déduire les phénomènes qui se passent dans le temps et les propriétés dépendantes du temps des systèmes matériels de leurs propriétés indépendantes du temps. Mais dans le concept de système matériel se trouve comprise (d'après la définition § 121) la continuité de la cohésion régulière des points du système, laquelle veut dire (d'après le § 115) que la donnée de tous les déplacements finis possibles des points du système est contenue dans la donnée de tous les déplacements possibles infiniment petits que ceux-là parcourent en ligne droite continue; et que de plus les déplacements possibles ne peuvent changer que d'une façon continue. Comme mobile dernier on suppose (§ 3) la particule de masse, c'est-à-dire le substrat ponctuel identique et indestructible du changement local continu. Mais cette particule n'est déterminée comme invariable que par la solidarité régulière des changements du système, c'est-à-dire le mobile dernier doit être pris

1. Est-il besoin de faire remarquer qu'on ne doit pas pour cela considérer cette déduction comme définitive?

avec des déterminations invariables telles qu'une dépendance régulière des changements de mouvement devienne constructible. Dans cette construction il n'est besoin, d'après Hertz, d'autres concepts fondamentaux que de ceux déjà introduits : temps, espace et masse. La force newtonienne et l'énergie moderne ne sont pas des concepts fondamentaux et nouveaux, mais différentes expressions des lois du mouvement, et même des expressions critiquables, en tant qu'on fait rentrer dans les forces les actions à distance, dans les énergies, les énergies potentielles comme essentiellement distinctes des cinétiques. Pour éviter ces suppositions critiquables, Hertz appuie la mécanique sur cette seule loi fondamentale (§ 308) : Tout système libre persiste dans son état de repos ou de mouvement uniforme suivant la ligne la plus droite possible, loi qui pour certains systèmes de corps est un fait d'expérience (solides dans le vide, fluides parfaits en vase clos), pour d'autres s'étend par hypothèse, d'une part parce qu'on ramène des changements en apparence discontinus des corps perceptibles à des changements continus de leurs particules imperceptibles (percussions), d'autre part parce qu'on fait l'hypothèse de mouvements invisibles de masses insaisissables dont l'action se manifeste par les mouvements visibles de masses saisissables (actions à distance, chaleur, etc., §§ 315-317). Cette loi ne pourrait se fonder sur la seule expérience, elle serait logiquement fondée s'il était démontré qu'elle satisfait

avec le minimum d'hypothèses nécessaires et suffisantes à l'exigence de la détermination univoque des situations et des vitesses d'un système, à chaque instant, d'après son état à un instant donné (§ 331).