Discorso di A. Reymond

LE PROBLÈME DE L'INFINI

ET SON RÔLE DANS LA DÉCADENCE DE LA SCIENCE GRECQUE

Le développement de la pensée scientifique dans la Grèce ancienne pose à l'historien comme au philosophe un problème aussi captivant que délicat à résoudre. Surgissant comme par miracle de l'amas confus des traditions orientales, la science grecque brille d'un vif éclat durant une époque relativement courte; puis elle végète d'une façon misérable pendant de longs siècles et meurt après une courte et passagère renaissance qu'illustrent les noms de PAPPUS et de DIOPHANTE.

Chose étrange! Cette décadence se manifeste au moment où rien ne la justifie. Les conquêtes d'Alexandre ont fait pénétrer en Orient la civilisation grecque et ont ainsi étendu le champ de son action; peu après, l'établissement de l'empire romain assure aux savants la paix et la prospérité économiques dont ils ont besoin pour poursuivre leurs travaux. Comment expliquer qu'à ce moment même se produise le déclin des sciences?

Le problème ainsi posé semble ne présenter qu'un intérêt purement historique; il soulève cependant une question dont l'importance est très actuelle. Au dire de quelques sociologues les états européens présentent à plus d'un égard les mêmes symptômes de décadence qui caractérisèrent l'histoire de l'empire romain au moment où végétait la science grecque. S'il en est ainsi, la science moderne peut-elle échapper à la décrépitude qui atteignit son aînée, et continuer à progresser indéfiniment? ou bien n'est-elle pas appelée, elle aussi, dans un avenir plus ou moins rapproché, à végéter pendant quelque temps, puis à s'éclipser momentanément? L'étude de ce qui a été est sans doute de

nature à éclairer cette troublante question, car préciser et déterminer les raisons d'une décadence passée, c'est peut-être comme le dit Paul TANNERY, « découvrir les précautions à prendre pour éviter une décadence future » (1).

En ce qui concerne plus spécialement les causes qui expliquent et justifient le déclin de la science grecque, elles sont de deux sortes, nous semble-t-il. Les unes sont extérieures aux caractères de cette science et se rattachent à des transformations politiques, sociales, économiques ou religieuses. Les autres sont inhérentes à sa structure même et à l'esprit dans lequel elle a été conçue et formulée.

Parmis ces causes ce sont surtout les premières qui ont été étudiées. La réligion chrétienne en particulier est généralement considérée comme ayant surtout contribué à arrêter le développement des sciences sous l'empire romain et comme ayant d'autre part favorisé leur renaissance au XVIe siècle.

D'après Aug. COMTE le polythéisme à ancré dans l'esprit des Grecs, alors même qu'ils étaient libérés des superstitions religieuses, l'idée que la nature obéit non à des lois, mais à des jeux capricieux, et cette convinction le monothéisme seul a pu la déraciner. Selon DUBOIS-REYMOND c'est également le christianisme qui a fait naître la notion d'une vérité absolue et digne d'être recherchée. Une autre conséquence de la religion chrétienne a été, aux yeux de M. EGGER, de familiariser les savants avec la notion du mystère et de les habituer à accepter les vérités de fait que l'esprit essentiellement logique des Grecs était incapable de concevoir.

Ces diverses explications, si même elles sont jugées satisfaisantes, nous aprennent seulement pourquoi les sciences physiques et naturelles ont été peu cultivées par les Grecs; mais elles ne résolvent en aucune façon le problème concernant la décadence des sciences mathématiques et mécaniques; au reste et même en ce qui régarde l'étude de la nature, M. MILHAUD nous semble avoir parfaitement montré ce que ces explications avaient de trop absolu et d'injuste à l'égard de la pensée grecque (2).

Faut-il donc rechercher d'autres causes extérieures et voir dans la couquête romaine et dans la perte de l'indépendance pour les États hellènes la raison pour laquelle

---

(1) *La Géométrie grecque*, Paris, 1887, p. 9.

(2) G. MILHAUD, *Études sur la pensée scientifique*, p. 235 et suiv. Paris, 1906.

la science grecque à peu à peu dépéri? Sans doute les Romains ne purent jamais se plier aux abstractions scientifiques; mais, comme le remarque Paul TANNERY, ils reconnurent de bonne heure la supériorité intellectuelle de la race hellène, et les études scientifiques retrouvèrent bien vite sous leur domination une protection largement suffisante à leur progrès (1).

Dira-t-on peut-être que durant la période gréco-romaine le niveau intellectuel avait baissé sous l'effet de préoccupations nouvelles? La morale stoïcienne, il est vrai, était alors prédominante et, par son utilitarisme foncier, s'opposait à l'étude désintéressée de la science. Les travaux d'un PAPPUS ou d'un DIOPHANTE témoignent toutefois d'efforts intellectuels qui sont près d'égaler ceux du passé.

Ainsi les causes que nous avons appelées extérieures sont impuissantes à expliquer l'évolution des sciences grecques, et c'est dans la constitution même de ces sciences, c'est-à-dire dans des facteurs d'ordre interne qu'il faut rechercher la cause principale de leur déclin. Des causes de ce genre nous paraissent en particulier de nature à faire comprendre pourquoi les mathématiques grecques n'ont pu se développer au delà de certaines limites.

Dans ce domaine M. ZEUTHEN a signalé comme ayant paralysé l'oeuvre des géomètres grecs les défauts suivants. Le souci qu'ils avaient d'assurer la rigueur logique à leurs écrits en rendait l'exposition et la lecture difficiles. Outre cela le mépris qu'ils professaient à l'égard des mathématiques appliquées les a empêchés de renouveler leurs méthodes au contact des réalités géométriques (2). Il est encore, nous semble-t-il, une autre cause à indiquer et non moins importante, c'est la façon même dont les penseurs de la Grèce ont conçu et utilisé scientifiquement la notion de l'infini.

Le réalisme arithmétique naïvement proclamé par les Pythagoriciens fut, on le sait, mis en échec par la découverte que, dans un carré, la diagonale et le côté sont incommensurables. La période de critique et de tâtonnement qui suivit cette constatation imprima à la pensée mathématique des Grecs une timidité dont elle ne se départira plus désormais.

Au point de vue logique, en effet, les raisonnements de ZÉNON d'ÉLÉE paraissent impeccables et l'impossibilité de

---

(1) *Op. cit.*, p 11.

(2) ZEUTHEN, *Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge.* p. 201, Paris, 1902.

les concilier avec les données de l'intuition géometrique et sensible semble condamner à tout jamais l'emploi rationnel et immédiat de l'infini mathématique. D'autre part et pratiquement, certains sophistes tels que ANTIPHON tirent de ces mêmes raisonnements des conséquences qui sont inacceptables comme la possibilité de la quadrature du cercle (1).

Grâce à ces faits et malgré les efforts d'ARISTOTE pour légitimer la continuité, la confiance dans les spéculations infinitésimales fut ébranlée à jamais dans l'esprit des mathématiciens grecs. Au reste les formules énoncées par ARISTOTE ne sont pratiquement d'aucun usage pour le mathématiques; elles appartiennent à un traité de physique qui porte au plus haut point le caractère d'une métaphysique (2).

Toutefois et comme le problème discuté par ZÉNON compromettait l'existence même de la géométrie en tant que science rationnelle, la pensée grecque usa d'un artifice sinon pour le résoudre, du moins pour en atténuer la portée, et cela soit dans la géométrie calculante, soit dans la géométrie proprement dite.

En ce qui concerne la première, l'évaluation d'aires limitées par une courbe plane fixa de bonne heure l'attention de l'école mathématique d'Athènes. Dès le IVe siècle avant J.-C. EUDOXE indique la marche à suivre pour résoudre de tels problèmes. La méthode d'exhaustion qu'il inaugure fut développée et appliquée d'une façon magistrale par ARCHIMÈDE.

Cette méthode nous montre sur le vif avec quelle ingéniosité l'esprit grec sut satisfaire à la fois aux exigences de la logique et aux données de l'intuition géométrique. Le procédé exhaustif repose en effet sur un raisonnement par l'absurde. Si d'une quantité l'on retranche une partie plus grande que sa moitié, puis que du reste ainsi obtenu l'on retranche une partie plus grande que la moitié de ce reste et ainsi de suite indéfiniment on finira par obtenir un reste inférieur à toute quantité donnée. C'est de cette façon que si l'on double plusieurs fois de suite le nombre des côtés de deux polygones réguliers inscrit et circonscrit à un cercle, on diminue chaque fois de plus de la moitié la surface qui les sépare du cercle. La différence entre leurs aires peut donc être rendue aussi petite que l'on voudra,

---

(1) ZEUTHEN, *op. cit*, p. 56.

(2) Voir sur ce point l'article très pénétrant de M. L. BRUNSCHVICG : Une phase du développement de la pensée mathématique, *Rev. Mét. et Mor.*, mai 1909.

et par suite la surface du cercle évaluée avec une approximation aussi approchée qu'on le désire.

Le raisonnement qui justifie ce genre de calcul empêcha par sa rigueur même les géomètres grecs de chercher dans une autre voie la solution du problème que posaient les segments curvilignes. Par un trait de génie sans doute, ARCHIMÈDE inventa un procédé d'intégration qui repose sur l'étude comparative des moments statiques de deux figures et qui nécessite pour cette étude l'emploi de lignes ou de plans parallèles en nombre infini; mais cette méthode mécanique à laquelle ARCHIMÈDE refuse une vertu démonstrative n'a de valeur que si les résultats en sont confirmés par le raisonnement exhaustif [1]; au point de vue théorique elle resta donc sans effet et ne put servir à élaborer une notion nouvelle de l'infini.

La faveur exceptionnelle que les Grecs accordèrent à la méthode d'exhaustion n'a rien d'étonnant si l'on songe que cette méthode, reposant sur ce que M. BRUNSCHVICG appelle la logique de l'inégalité, permettait de réfuter victorieusement la dialectique de ZÉNON. D'une part, en effet, la condition imposée à la grandeur (ligne ou surface) de diminuer toujours de plus de sa moitié garantit qu'elle peut devenir plus petite que toute quantité donnée et cela après un nombre fini d'opérations; de cette façon se trouve évité l'emploi direct de l'infini qui résulte de la dichotomie et que ZÈNON avait critiqué. D'autre part le mode de construction employé dans chaque cas particulier assure que la loi de diminution ainsi définie est réellement observée par la grandeur décroissante, et dès lors les termes qui en sont la traduction numérique forment une série dont la convergence est évidente et n'a pas besoin d'être prouvée.

Toutefois et malgré la profondeur de ses principes, la méthode d'exhaustion ne pouvait, telle que les anciens la pratiquaient, servir à étendre indéfiniment le champ d'investigation des mathématiques. Son emploi conduisait sans doute et tout naturellement, comme nous venons de le voir, à utiliser des séries convergentes, mais c'était toujours à propos d'un problème particulier et spécial que ces séries étaient envisagées. Or, pour généraliser l'application de la méthode exhaustive, il aurait fallu, comme le firent plus tard CAVALIERI, FERMAT et surtout PASCAL [2], considérer en elles-

---

[1] *Revue des Sc. pures et appliquées*, 30 nov. 1907.

[2] MARIE, *Histoire des sciences mathématiques*, t. IV, p. 97. — ZEUTHEN, *Geschichte der Math. im XVI und XVII*, p. 256 et suiv., Leipzig, 1903.

mêmes les progressions qui traduisaient la décomposition de la figure géométrique. Il aurait fallu établir une fois pour toutes les conditions auxquelles devaient satisfaire ces progressions pour être utilisées dans la solution d'un problème quelconque de quadrature. En suivant cette voie les géomètres grecs auraient été probablement amenés à avouer franchement l'élément infinitésimal qui, malgré leurs efforts pour le masquer, entrait inévitablement dans leurs calculs. Comme récompense de cet aveu ils auraient sans doute découvert un artifice analogue à celui dont se sont servis NEWTON et LEIBNIZ et ils auraient réalisé dans leur méthode une généralisation dont ils possédaient les éléments essentiels. Mais craignant avant tout la contradiction de l'infini numérique, ils s'attachent tellement à assurer la rigueur de la méthode d'exhaustion dans chaque cas particulier « qu'il ne leur reste plus de place pour développer au delà du besoin momentané, les méthodes dont ils se servent pour prouver leurs résultats, non plus que pour en créer de nouvelles [1] ». Nécessitant déjà de longues démonstrations pour les cas relativement simples, le procédé exhaustif devenait d'un emploi singulièrement compliqué pour l'intégration des surfaces ou des volumes dont les éléments sont liés par des relations complexes. Aussi n'est-il pas étonnant que dans leur fidélité à ce procédé les successeurs d'ARCHIMÈDE n'aient pu continuer l'oeuvre géniale de leur maître malgré les loisirs et les connaissances qu'ils possédaient.

Quant aux recherches d'ordre purement géométrique, elles aboutirent à des résultats plus étendus; mais elles ne purent dépasser certaines limites, et cela pour la même raison, nous semble-t-il, qui avait arrêté l'essor de la géométrie calculante.

Les Grecs, il est vrai, parvinrent de bonne heure à tourner la difficulté relative aux incommensurables, grâce à la théorie des proportions dont EUDOXE formule les principes. Dans le carré, par exemple, peu importe qu'aucune unité de mesure ne permette d'évaluer arithmétiquement le rapport du côté et de la diagonale. Ce qu'il y a d'intéressant au point de vue géométrique, c'est de constater que ce rapport est le même, quel que soit le carré envisagé, et la théorie des proportions permet d'affirmer qu'il en est réellement ainsi.

---

[1] ZEUTHEN, *op. cit.*, p. 143.

En possession de cette idée féconde, la géometrie grecque fit de rapides progrès. Elle découvrit et classa les relations définies qui appartiennent à chaque type de figures, comme le triangle, le trapèze, etc., indépendamment de l'unité arbitrairement choisie pour les évaluer. Bien plus, à l'occasion de certains problèmes comme celui de la duplication du cube, elle créa des lignes nouvelles (ellipse, hyperbole, parabole), que l'on ne peut construire au moyen de la règle et du compas, mais qui jouissent du propriétés définies. Dès leur apparition, pour ainsi dire, ces courbes furent reconnues comme appartenant toutes à des sections coniques; un progrès immense fut cependant réalisé le jour où APOLLONIUS de Perga généralisa la question et envisagea des sections planes quelconques faites sur des cônes circulaires quelconques.

Il semblait désormais que la géométrie grecque allait s'élancer à la conquête des méthodes générales qui caractérisent la géométrie moderne. Elle en possédait tout au moins les données essentielles.

Elle avait tout d'abord entre les mains un procédé général pour l'étude des sections coniques et qui était le suivant. Si dans une section conique l'on prend pour axes des coordonnées un certain diamètre et une direction parallèle aux cordes conjuguées à ce diamètre, il existe une relation constante entre le carré d'une ordonnée et un certain rectangle construit sur l'abscisse correspondante. Presque toutes les propriétés des sections coniques peuvent se déduire de cette unique propriété qui joue ici à peu près le même rôle que l'équation du deuxième degré à deux variables dans l'analyse cartésienne [1] « Tandis que nous exprimons aujourd'hui la propriété fondamentale d'une courbe par une équation algébrique, APOLLONIUS la représente par une figure; et par le fait que cette figure auxiliaire est tracée à angle droit avec l'axe des abscisses, quand bien même les ordonnées coupent cet axe sous un autre angle, elle reste toujours, en quelque sorte, indépendante de la figure pour l'étude de laquelle elle doit servir [2] ».

Ce mode de représentation de plus le grand avantage de rendre moins indispensable l'emploi de quantités positives et négatives, de sorte que la découverte des signes algébriques n'eût pas été une condition nécessaire aux progrès de la géométrie grecque.

---

(1) CHASLES, *Aperçu historique des méthodes*, p. 18, Paris, 1875.
(2) ZEUTHEN, *Hist. des Math. dans l'Antiquité*, p. 168.

De plus et à côté de ce procédé général de résolution, plusieurs théories particulières avaient été établies, qui devaient servir un jour de base à la géométrie moderne. APOLLONIUS, entre autres, avait formulé le rapport harmonique et quelques théorèmes concernant les pôles, les polaires et même les polaires réciproques. Son traité de la Section déterminée énonce en outre la propriété des points en involution, retrouvée plus tard par DESARGUES. PAPPUS, de son côté, définit le caractère essentiel du rapport anharmonique dont le rôle est fondamental en géometrie.

Rien d'essentiel ne manquait donc aux savants grecs pour réaliser les progrès qui furent accomplis par la suite, si ce n'est la conception de l'infini géométrique; mais l'idée d'une infinité spatiale, entrevue peut-être par les philosophes de l'Ionie, était devenue de plus en plus étrangère à l'esprit des Grecs. Aux yeux d'ARISTOTE qui sur ce point est leur fidèle interprète, l'espace réel et par conséquent l'espace géométrique sont finis. Par suite, concevoir des points, des droites ou des plans rejetés à l'infini, est à la fois illogique et contraire à l'expérience. L'on ne saurait donc, même au nom d'un symbolisme commode, invoquer l'infini géométrique et en faire le point de départ de méthodes nouvelles.

Cette attitude critique est, nous semble-t-il, la raison essentielle pour laquelle la géométrie grecque fut impuissante à dépasser un champ d'études dans lequel elle s'etait logiquement enfermée, car plus elle se développait suivant ses propres méthodes, plus elle dut faire appel à un genre compliqué de démonstrations dont l'appareil finit par embarasser complètement l'enchaînement des théorèmes.

La preuve évidente qu'il en est bien ainsi, c'est l'existence même de la géométrie moderne. Le rôle que la notion de l'infini a joué dans son développement est capital et il serait intéressant de le montrer. Nous nous bornerons aux remarques suivantes.

DESARGUES, qui le premier rénova la géométrie des Anciens, eut nettement conscience de la puissance démonstrative de l'infini mathématique et, dans sa théorie de l'involution en particulier, « il remarque expressément que le point central est lié avec le point à l'infini [1] ». Les simplifications apportées de ce fait étaient si grandes qu'elles frappèrent les contemporains du grand géomètre. Parlant de DESARGUES, le graveur BOSSE écrit: « Entre autres, ce qu'il a fait imprimer des sections coniques, dont une des

---

[1] ZEUTHEN, *Geschichte der Math. im XVI*, p. 182.

propositions en comprend bien comme cas, soixante de celles des quatre premiers livres des coniques d'APOLLONIUS, lui a acquis l'estime des savans [1] ».

Mais c'est surtout au XIXe siècle que l'introduction de l'infini mathématique a vivifié la géométrie finie et a créé une discipline autonome sous le nom de géométrie infinitésimale.

Dans la géométrie finie l'homographie joue un rôle essentiel. Or « le caractère plus particulier du principe d'homographie, parmi les autres modes de transformation des figures, est de passer, comme dans le calcul intégral, de l'infini au fini. Ce sont les propriétés d'une figure, qui a des parties à l'infini, qu'on veut le plus souvent, dans les applications du principe d'homographie, transporter à une figures du même genre, mais dont les mêmes parties sont placées à des distances finies [2] ».

Quant à la géométrie infinitésimale, les lignes suivantes de M. DARBOUX en montrent bien la grande importance. « La théorie de la déformation infiniment petite constitue aujourd'hui un des chapitres les plus achevés de la géométrie. Elle est la première application un peu étendue d'une méthode générale qui paraît avoir beaucoup d'avenir [3] ». De même en ce qui concerne les études de LIE sur les groupes continus de transformations M. DARBOUX fait remarquer que, « parmi les éléments essentiels de ses recherches, il convient de signaler les transformations infinitésimales dont l'idée lui appartient exclusivement [4] ».

Ainsi et pour conclure, c'est avant tout dans la constitution interne des mathématiques grecques qu'il faut rechercher les causes de leur décadence et principalement dans la crainte qu'elles eurent de reconnaître franchement et de symboliser l'infini mathématique. Ce fait semble également fournir la raison pour laquelle la mécanique rationnelle des Anciens ne put dépasser l'étude des phénomènes statiques. L'idée d'infinité et de continuité que le mouvement implique parut toujours obscure aux Grecs et ils ne trouvèrent pas sur ce point le moyen de concilier les exigences de la logique avec celles de l'expérience.

Les mathématiques modernes ont un essor si prodigieux que parler à leur sujet d'une cause interne de décadence serait un non-sens. Les recherches se poursuivent dans des

---

(1) CHASLES, *op. cit.*, p. 78.
(2) CHASLES, *op. cit.*, p. 263.
(3) *Étude sur le développement des méthodes géom.*, p. 27, Paris 1904.
(4) *Id.*, p. 30.

voies trop différentes et dans des pays trop divers pour que semblable catastrophe soit à redouter.

Les mathématiques risquent bien plutôt d'être paralysées par l'exubérance même de leur productions. Aussi est-il à souhaiter, comme le dit M. PICARD, que des hommes de génie viennent de loin en loin et au moins pour un temps donner l'illusion de la simplicité [1]. De quelle façon s'effectuera cette simplification? Il serait téméraire de le prédire. Il est à remarquer cependant que les études sur les fonctions et sur les équations différentielles sont de plus en plus liées aux spéculations concernant la théorie des ensembles et l'idée de nombre [2]. Peut-être sera-ce dans un symbolisme plus heureux et plus pratique du transfini que la pensée mathématique trouvera le moyen d'effectuer la généralisation désirée, de même qu'au XVIIe siècle elle a su, en créant une notion plus féconde de l'infini, franchir l'impasse dans laquelle la science grecque s'était arrêtée.

Mais si les études mathématiques n'ont pas à redouter une cause interne de décadence, les transformations sociales pourraient leur porter un coup mortel. Une fois disparues les fortunes privées, le régime collectiviste poussera-t-il l'État à favoriser les recherches désintéressées qui peuvent apparaître à un peuple comme un luxe inutile et sans lesquelles cependant le progrès des mathématiques n'est pas possible?

---

(1) *Sur le développement de l'Analyse*, p. 77.
(2) *Id.*, p. 23 et 76.