

« THÉORÈME DE PYTHAGORE », ORIGINE DE LA GÉOMÉTRIE SCIENTIFIQUE

Par M. H.-G. ZEUTHEN

Professeur à l'Université de Copenhague.

Habitués depuis notre enfance à la rigueur géométrique, nous avons souvent quelque difficulté à en bien distinguer les notions géométriques. Nous sommes disposés à croire que celles-ci se sont présentées suivant leur simplicité logique, ou bien dans le même ordre qu'il faut suivre pour bien fonder chaque nouveau progrès sur des faits déjà bien établis.

Déjà le premier historien des mathématiques, *Eudème*, de Rhodes, est tombé dans une méprise de ce genre. Il attribue, en effet, à *Thalès* la découverte de différentes propositions abstraites qui n'auraient aucun sens si elles ne faisaient pas partie d'un système de géométrie assez développé, celle-ci, par exemple : « Deux triangles ayant un côté égal compris entre deux angles égaux chacun à chacun sont égaux ». Il dit que *Thalès* devait s'en servir, d'après la manière dont on rapporte qu'il déterminait la distance des vaisseaux en mer¹. Certainement, en déterminant, au moyen de mesures qu'on peut se procurer, des distances à des points inaccessibles, on aura su profiter de la vérité exprimée par ledit théorème et probablement même aussi de la proportionnalité des côtés de deux triangles ayant deux angles égaux chacun à chacun; mais il y a loin de là à en faire un théorème exprès et à reconnaître sa dépendance de vérités encore plus simples.

De la même manière beaucoup d'autres vérités géométriques, et non pas celles-là seules qui font naturellement le point de départ

¹ P. TANNERY. *La géométrie grecque*. p. 90.

des systèmes scientifiques de géométrie, ont été à la disposition des hommes longtemps avant les véritables commencements de ces systèmes. On en trouve les traces dans tous les monuments d'une antique civilisation. Un bâtiment à base rectangulaire et bien orienté montre une connaissance de l'angle droit et de moyens de le construire, ainsi que la possession de procédés soit pour déterminer la trace horizontale du plan vertical passant par l'étoile polaire, soit pour diviser en deux l'angle des droites menées aux points du lever et du coucher du soleil. A la régularité des pierres des parois ou des carreaux du sol et à la décomposition de la masse de l'argile en briques carrées ou rectangulaires s'est attachée une idée des aires de figures planes : car le nombre des briques nécessaires pour les remplir en est une expression. Cette idée a trouvé encore des applications dans la distribution des terres. Le premier dessin a été du moins l'essai de construire une figure semblable à une autre; les différents arts, tels que la fabrication de tuiles, auront fait observer pour des nombres simples et entiers la proportionalité de leurs aires aux carrés des côtés homologues. On aura étendu ces proportionalités à certaines autres figures semblables; on n'aura pas attendu pour l'appliquer à la proportionalité de deux cercles aux carrés de leurs rayons qu'on sût la démontrer par la méthode d'exhaustion. En décomposant le plan en carrés et en y menant des diagonales, on aura obtenu immédiatement la duplication d'un carré, que nous regardons à présent comme une application particulière du théorème de *Pythagore*. On a pu le faire sans y attacher la moindre idée du théorème général¹. De même le jeu le plus simple avec un compas plus ou moins grossier a pu conduire à la construction de triangles et d'hexagones réguliers, à la décomposition du plan en ces figures et,

¹ SCHOPENHAUER recommande (*Welt als Wille und Vorstellung*, B. 1, § 15 et ailleurs) la même appropriation intuitive des vérités géométriques qui a été possible avant la géométrie propre; mais il n'a pas su évaluer la portée de cette appropriation. Voilà ce qui le porte à reprocher à *Euclide* de ne pas rendre sa démonstration du théorème général de *Pythagore* aussi simple que celle de son application à un triangle rectangle et isocèle, à laquelle nous avons fait allusion ici, et dont se sert *Socrate* dans un dialogue de *Platon* pour apprendre la duplication d'un carré à l'esclave de *Ménon*. *Euclide* s'en serait sans doute servi, s'il ne s'était agi que de ce cas particulier. Les artifices de la démonstration générale d'*Euclide* lui étaient nécessaires, parce qu'il avait besoin du théorème avant d'avoir parlé de la similitude, et sa démonstration est à cet égard un chef-d'œuvre. Nous nous occuperons du reste plus loin des voies plus intuitives qui ont pu conduire à la première découverte du théorème général.

peut-être à la triplification de triangles équilatères¹. Aux observations qu'on a pu faire ainsi aura aussi appartenu l'égalité des différentes parties d'une figure présentant une symétrie ou uniformité visible.

Avant la géométrie propre, ceux qui ont eu dans leur métier ou art à s'occuper des figures en question en ont pu acquérir par l'intuition les connaissances dont nous venons de parler : ce fut le résultat d'expériences réitérées assez souvent et de comparaisons et raisonnements assez simples, gravés assez promptement dans la mémoire pour faire croire immédiates les notions ainsi acquises. On a aussi besoin de l'intuition dans la géométrie exacte. Non seulement elle est le meilleur guide vers les nouvelles *découvertes*, qu'il faut démontrer *ensuite* rigoureusement, mais en même temps elle est d'un usage bien reconnu dans les systèmes géométriques, soit dans celui d'Euclide soit dans ceux dont la construction exacte fait un objet de prédilection pour les géomètres du vingtième siècle. Seulement les peuples ayant une civilisation sans aucune géométrie propre, ainsi que les hommes de métier à Rome, où l'on n'en avait guère de vraiment scientifique, et même souvent de nos jours, appliquent cette intuition à chaque figure dont ils ont à s'occuper, tandis que, dans les systèmes, on réduit l'application de l'intuition au plus petit nombre possible des cas les plus simples ; pour ceux-ci on avoue qu'on ne les tient que de l'intuition (axiomes), ou bien on les postule sans se soucier de l'origine de ces notions. L'affaire de la géométrie, c'est seulement d'en déduire les autres vérités. Cela n'empêche pas que les autres vérités peuvent sembler ensuite assez intuitives pour être utilisées dans la vie pratique ou servir de points de départ pour de nouvelles découvertes.

Quelle raison d'être a donc la géométrie propre et quel besoin l'a fait naître ?

Ce besoin s'est montré de deux manières. L'application de la simple intuition à des questions de plus en plus compliquées est exposée à dégénérer en une routine qui ne sait plus distinguer avec

¹ En expliquant autrement (voir l'article de M. G. Kewitsch dans le XVIII^{me} vol. de la *Zeitschrift für Assyriologie*) et d'une manière plus arithmétique l'origine du système sexagésimal des Babyloniens, on doit peut-être attribuer la division du cercle en 360 degrés à la facilité avec laquelle on construit la sixième partie du cercle. En effet, c'est à cette sixième partie que s'applique immédiatement la division sexagésimale en degrés, minutes et secondes. Devant les arguments de M. Kewitsch, nous reconnaissons la faiblesse de l'explication astronomique de cette division du cercle.

sûreté le vrai du faux; et, de l'autre côté, en s'occupant des questions géométriques, on est conduit à la connaissance de vérités que l'intuition n'était guère capable de saisir, ou du moins ne le devenait qu'après des efforts pour les mettre en rapport, par une démonstration plus ou moins développée, avec des vérités plus immédiatement évidentes.

Le premier de ces deux besoins s'est fait sentir par des méprises telles que les suivantes : Dans la mesure des terres auxquelles, pour commencer, il était naturel de donner une forme rectangulaire, on a été conduit ensuite à appliquer aux aires de quadrilatères s'approchant de la figure rectangulaire la formule $\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}$ où a, b, c, d sont les longueurs des côtés dans leur ordre naturel. Alors l'approximation n'est pas mauvaise, mais la routine a conduit à appliquer ensuite la même formule à des figures très différentes du rectangle. On trouve cette formule qui a aussi été employée même pour des triangles (regardés comme quadrilatères à un côté égal à zéro) dans l'ancienne géométrie égyptienne, dans la géométrie indienne, chez les agrimenseurs romains et même parfois chez nos paysans, et au moins les agrimenseurs romains l'ont appliquée à des cas où l'approximation était fort mauvaise. La construction d'un hexagone régulier a conduit (en se servant du compas pour mesurer les arcs) à la valeur 3 de π , dont on a fait usage même en des cas où cette approximation ne suffisait pas.

La première découverte que l'intuition ne pouvait pas fournir immédiatement fut celle du « théorème de *Pythagore* » appliqué à des triangles rectangles et de côtés inégaux. Cela résulte du fait que les géométries qui ont été capables de se développer ultérieurement ont pris cette découverte pour point de départ.

Ce progrès n'est pas encore fait dans l'ancienne géométrie égyptienne. C'est à elle que s'appliquent la plupart des remarques que nous avons faites sur la géométrie qui se contente d'intuitions, et elle peut en servir d'exemple. Les Egyptiens se sont élevés, dans la méthode de *segt*, à l'emploi du rapport des deux côtés d'un triangle rectangle pour en fixer la forme, ou bien pour déterminer l'inclinaison de droites; mais dans leur géométrie on ne trouve aucune trace du « théorème de *Pythagore* ». Il est possible que, comme le suppose M. Cantor¹, ils aient eu une connaissance empirique du

¹ *Vorlesungen*, I, p. 63-64.

triangle rectangle de côtés 3, 4 et 5; mais les raisons émises en faveur de cette hypothèse ne nous paraissent pas bien convaincantes. C'est à bon droit que le savant historien, en parlant de l'existence d'équerres constatée par des monuments figurés égyptiens, ajoute que pour construire cet outil on devait posséder des moyens d'en contrôler la justesse; mais il faut ajouter aussi que l'idée générale d'un angle droit devait précéder tout moyen empirique de contrôle. On a pu acquérir cette idée soit en pliant une feuille plane (papyrus, parchemin ou drap à une époque où l'on n'avait pas de papier), soit en la tirant de l'idée de la symétrie. Et chacune de ces origines de l'idée d'un angle droit a pu fournir d'assez bons moyens pour en construire et pour contrôler ceux qu'on construit autrement. L'idée de la symétrie conduit par exemple à élever la perpendiculaire sur un point A d'une droite en y déterminant premièrement deux points B et C tels que $BA = AC$ et ensuite hors de la droite un point D tel que $BD = CD$. Dans le champ cette construction s'exécute au moyen de cordes tendues et elle est employée dans deux des règles que nous rapporte *Apastamba (Sulbasutra)*¹ et dont les Indiens s'étaient servis depuis une époque très reculée pour construire leurs autels. Les *harpedonaptes* égyptiens ont pu faire un usage semblable des cordes auxquelles ils doivent leur nom — tireurs de cordeau. — Ce nom ne suffit donc pas pour démontrer qu'ils connaissaient la propriété du triangle de côtés 3, 4 et 5 dont parlent du reste certaines traditions grecques². M. Cantor regarde lui-même les signes qui pourraient indiquer la connaissance de ce triangle chez les Hébreux et les Babyloniens comme assez douteux. Quoiqu'il en soit, on ne trouve chez eux aucune trace d'une connaissance ultérieure du « théorème de Pythagore ».

Les *Chinois* ont eu de très bonne heure connaissance de la propriété du triangle de côtés 3, 4 et 5. Probablement elle a été tout d'abord empirique et il est difficile de décider à quelle époque on y a rattaché

¹ Chap. I, 7 et chap. VIII, 5. Elles se trouvent aux p. 330 et 352 dans la traduction de M. BÜRK, *Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft*, t. 56. Dans ce qui suit nous citerons cette traduction et l'introduction de M. BÜRK au t. 55 comme BÜRK, t. 56 et t. 55.

² M. ALLMAN, *Greek Geometry from Thales to Euclid*, p. 29, cite à cet égard *Plutarque*. Les divisions des pavés en carrés (*Allman*, p. 33) ont aussi pu offrir aux Égyptiens les mêmes occasions d'observation que les décompositions analogues des Indiens dont nous avons par les *Sulbasutras* une connaissance plus directe, et dont nous allons parler immédiatement.

une démonstration sur laquelle nous reviendrons et une connaissance générale du « théorème de Pythagore ».

Quant aux *Grecs* et aux *Indiens* les traditions les plus anciennes signalent des connaissances plus générales. Celles-ci sont attribuées par les Grecs à *Pythagore*; mais le développement rapide qu'a subi ensuite la géométrie grecque fondée par ce grand homme, nous a dérobé les moyens de bien connaître la portée de ses connaissances et de ses découvertes. Il en est autrement pour les Indiens : les *Sulbasutras* nous font connaître un état de leur géométrie presque identique à celui auquel, d'après les meilleures sources, Pythagore l'aurait élevée. Nous apprenons donc à la fois par là à connaître le niveau géométrique où s'est faite la découverte du « théorème de Pythagore » et les progrès ultérieurs que cette découverte allait provoquer immédiatement.

Cependant cet usage des *Sulbasutras* ne serait pas permis si, comme le croit M. Cantor¹, la géométrie que nous y trouvons n'est qu'une reproduction de connaissances grecques; mais cette hypothèse n'est pas soutenable, si la chronologie de M. Bürk est juste. Selon lui², l'*Apastamba Sulbasutra* doit dater du quatrième ou cinquième siècle avant Jésus-Christ au plus tard. Je suppose donc que même les grandes divergences des chronologues de l'histoire indienne ne rendent pas possible de lui assigner une date permettant une influence du côté de *Heron*, qui a vécu probablement un siècle après Jésus-Christ. Du reste, après la découverte du véritable texte des Métriques de *Heron*, les ressemblances qu'on a cru voir entre son œuvre et les *Sulbasutras* se réduisent à celles que l'unité des vérités géométriques rend nécessaires. Comme les *Sulbasutras* s'écartent encore plus du reste de la littérature grecque que nous possédons et qu'ils ne nous communiquent que des vérités connues longtemps avant *Euclide*, ils nous fourniraient, dans le cas où ils seraient provenus d'influences grecques, un précieux moyen de connaître la plus ancienne géométrie des Hellènes. Mais rien ne prouve une telle influence et nous croirions plutôt, avec M. Bürk, à une influence inverse venant à *Pythagore* du côté oriental. En effet, M. Bürk démontre³ que du moins une partie

¹ *Vorlesungen*, t. I, p. 596. [Après la publication de M. BÜRK, M. CANTOR a modifié ses vues. (Archiv. der Math. (3), 8, p. 63)]

² BÜRK, t. 55, p. 551.

³ BÜRK, t. 55, p. 553-556. Mon collègue M. D. ANDERSEN m'a fait observer que M. MACDONELL se prononce dans son *History of Sanskrit Literature* dans le même sens que M. BÜRK.

des connaissances qui s'attachent au théorème dit de Pythagore datent d'une époque bien antérieure aux *Sulbasutras*. Ceux-ci nous rapportent en effet des règles rituelles beaucoup plus anciennes. Je ne me tiendrai ici qu'à celui de ses arguments qui a un côté géométrique, le seul dont je puisse juger moi-même.

Un des autels dont les *Sulbasutras* nous enseignent la construction géométrique est déjà mentionné dans *Taittiriya-Samhita* et *Satapatha-Brahmana*, œuvres qui datent, selon M. *Bürk*, au plus tard du huitième siècle avant Jésus-Christ. Il a la forme d'un trapèze isocèle (fig. 1), dont la hauteur est égale à 36 et les bases respectivement à 30 et à 24. L'*Apastamba-Sulbasutra* indique plusieurs constructions¹ de cet autel, où les angles droits sont déterminés au moyen des triangles rectangles suivants : 1° EFC qui a pour côtés la hauteur EF (= 36) et la demi-base FC (= 15) et dont l'hypoténuse EC doit être égale à 39; 2° les triangles BEO et CFO qui ont pour côtés les demi-bases : BE = 12 et FC = 15 et les deux segments de la hauteur EO = 16 et OF = 20, et dont les hypoténuses, segments de la diagonale BC, doivent être BO = 20, OC = 25; 3° le triangle EGA ayant pour côtés la demi-base EA = 12 et le segment de la hauteur EG = 5 et dont l'hypoténuse doit être AG = 13; 4° le triangle EJA ayant pour côtés la demi-base EA = 12, le segment de la hauteur EJ = 35 et dont l'hypoténuse doit être AJ = 37; 5° le triangle ayant pour côté la demi-base FC = 15 et le segment de la hauteur FH = 8 et dont l'hypoténuse HC = 17.

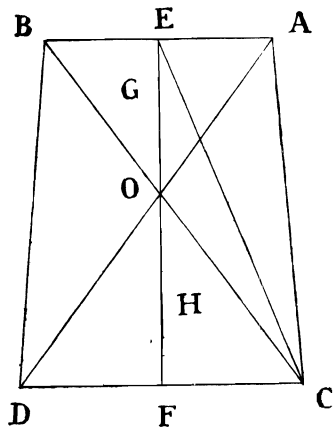


Fig. 1.

De même que M. *Bürk* et que M. *Cantor*², nous croyons que dès l'origine on en a choisi les dimensions telles qu'on en pût profiter pour la construction des angles droits. Cette construction n'est pas montrée dans les plus anciennes descriptions de l'autel; mais c'est probablement du premier des triangles rectangles aux côtés 36, 15 et 39 qu'on a fait usage originairement. *Apastamba* montre en effet sa vénération

¹ BÜRK, t. 56, p. 340-341 (chap. V, 1-6).

² I, p. 596-597.

pour ce triangle, non seulement en commençant par lui et en l'employant aussi à la construction de la droite BA (prolongée), mais en introduisant dès son premier chapitre (n° 2)¹, cette construction des deux perpendiculaires avant le théorème général de Pythagore et toutes les autres applications qu'il en fait. Il est du reste assez probable qu'en faisant le choix de la longueur de la plus petite base on a aussi eu égard à la formation des triangles à côtés entiers BOE et COF². Quant au facteur commun 3 des différentes longueurs, il aura sans doute été nécessaire afin de donner aux multiples d'une mesure connue des grandeurs convenables pour la construction de l'autel. Après le choix des dimensions, on s'est plu à profiter de la connaissance d'autres triangles rectangles de côté 12 ou 15 pour multiplier les procédés de construction.

Les Indiens ont donc eu une connaissance très ancienne du triangle rectangle de côtés 15, 36 et 39 ou 5, 12, 13 et probablement aussi du triangle 3, 4, 5. Les autres notions géométriques que nous communiquent *Apastamba* se rattachent assez intimement à ces connaissances pour nous exempter d'en chercher l'origine ailleurs que chez les Indiens.

Les premiers chapitres de l'*Apastamba sulbasutra*³ ont un caractère essentiellement géométrique. Dans le premier les propositions 2 et 3 contiennent les constructions d'angles droits au moyen de cordes de longueurs 15, 36 et 39 ou 3, 4 et 5.

Le n° 4 contient l'énoncé général du « théorème de Pythagore »; il est seulement, comme dans les autres sulbasutras, appliqué aux côtés et à la diagonale d'un rectangle, et non pas aux côtés d'un triangle. *Apastamba* ajoute que les constructions précédentes sont des applications de ce théorème à des cas où le rectangle est « reconnaissable », cela veut dire, évidemment, où ses côtés et la diagonale s'expriment par des nombres entiers.

Le n° 5 est l'application du théorème précédent à un carré, ou bien du « théorème de Pythagore » à un triangle isocèle. Pour la rendre utile, elle aussi, à des constructions pratiques d'angles droits, l'auteur indique au n° 6 que pour avoir la diagonale d'un carré il faut prendre $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4} \frac{1}{3.4}$ du côté, ce qui est une approximation assez

¹ BÜRK, 56, p. 327.

² Ou aurait-on commencé par ces deux triangles? Cela expliquerait le facteur commun 3 des côtés du triangle E F C.

³ BÜRK, t. 56, p. 327-389.

bonne de $\sqrt{2}$. Le n° 7 contient une construction d'un carré que nous avons déjà citée comme exemple d'une détermination de perpendiculaires par des cordes sans dépendance du « théorème de Pythagore ».

Le n° 1 du second chapitre contient l'application de la valeur approchée de $\sqrt{2}$ (I,6) à la construction d'un carré. Le n° 2 contient la construction de $a\sqrt{3}$ (« droite qui produit le triple ») comme diagonale d'un rectangle aux côtés a et $a\sqrt{2}$. Dans le n° 3 on remarque que $a\sqrt{\frac{1}{3}}$ est le côté de la neuvième partie du carré construit sur $a\sqrt{3}$, ou bien que $\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Les n°s 4-5 contiennent l'application du « théorème de Pythagore » à la construction d'un carré égal à la somme ou à la différence de deux carrés donnés, le n° 6 en particulier la construction de $\sqrt{3} = \sqrt{2^2 - 1}$.

Dans le n° 1 *Apastamba* transforme un rectangle ab en un carré; il le fait comme *Euclide* (II,4) en commençant par le transformer en un *gnomon*, différence des carrés, $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ et $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$. Voilà le degré le plus élevé que notre auteur ait atteint.

Au contraire, il ne semble pas connaître le procédé dont *Euclide* se sert (Elém. I,44), pour résoudre le problème inverse : transformer un carré (parallélogramme chez *Euclide*) en un rectangle (parallélogramme de mêmes angles) dont on connaît un côté (b). Il se borne, en effet, à dire dans le n° 1 du *troisième chapitre* qu'il faut retrancher du carré (c^2) un rectangle (bc) au côté (b) et ensuite adapter le reste ($c^2 - bc$) à être ajouté au rectangle (bc), c'est-à-dire lui donner le côté b . Cette adaptation est un problème de la même nature que le problème proposé. Elle réussira si b et c sont donnés *numériquement*¹, par la division du rectangle $c^2 - bc$ par b , ou par celle du carré $(c-b)^2$ qu'on obtient par une soustraction ultérieure du rectangle $(c-b)b$. On aurait bien pu obtenir le même résultat plus directement en divisant c^2 par b ; mais le problème a été réduit à des nombres plus simples, ce qui est en réalité la voie de la solution arithmétique. C'est seulement beaucoup plus tard qu'un commentateur a exécuté *géométriquement* l'adaptation demandée en profitant, de même qu'*Euclide*, des rectangles dits complémentaires.

Les n°s 2 et 3 contiennent des constructions très grossières d'un

¹ BÉRK. I. 56, p. 334, note 2.

cercle égal à un carré donné et d'un carré égal à un cercle donné.

La première correspondrait à $\pi = \frac{4}{\left(1 + \frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)\right)^2}$, la seconde à $\pi = 4\left(\frac{13}{15}\right)^2$, expressions dont l'identité demanderait $\sqrt{2} = \frac{19}{13}$.

Les n^{os} 4-10 contiennent pour les cas particuliers suivants: $a = 1, 2, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, le nombre entier ou fractionnaire a^2 des petits carrés dont se compose le carré de côté a , et encore (7 et 9) des règles plus générales pour la formation et l'augmentation de carrés. Dans le n^o 7 il est dit qu'une corde produit autant de séries (de petits carrés) qu'elle contient d'unités et le n^o 9 est identique à notre formule $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, représentée géométriquement comme dans *Euclide* II,4. Citons encore la remarque dans le n^o 4 qu'on ne parle que de carrés dans les cas où on ne dit pas expressément autre chose, remarque qui fait allusion, selon nous, à la possibilité de divisions analogues d'autres figures. Dans les applications qui suivent, l'auteur connaît en tout cas la division d'un rectangle de côtés a et b en ab petits carrés.

Les chapitres suivants contiennent les applications de ces propositions géométriques aux constructions ritualistes, premièrement à celle de l'autel trapézoïdal dont nous avons déjà parlé. On aura remarqué que la règle donnée dans le précédent chapitre pour l'augmentation d'un carré (III,9), ainsi que la représentation antérieure de la différence de deux carrés sous forme de gnomon (II,7), a fourni les moyens de déterminer les triangles rectangles à côtés entiers¹ dont en particulier ces constructions présentent plusieurs exemples, moyens dont se servaient aussi les Grecs au même effet.

Le n^o 7 du quatrième chapitre, où l'auteur trouve que l'aire du trapèze isocèle de bases 30 et 24 et la hauteur 36 est égal à 972 unités carrées présente exceptionnellement l'exemple d'une véritable démonstration géométrique. En effet, on transforme le trapèze en un rectangle par la transposition du triangle rectangle formé d'un des deux côtés égaux, de sa projection sur la base et de la hauteur.

La suite traite de constructions de sanctuaires de figures assez différentes et de la détermination des nombres des briques carrées ou rhomboïdales nécessaires pour remplir l'intérieur de ces figures

¹ M. BÜRK montre (t. 55, p. 569-572) longuement les déterminations de tous les triangles de cette nature qui sont mentionnés dans les *sulbasutras*.

planes ainsi que des formes et des nombres des briques des bords. Ce qui nous y intéresse le plus, c'est la multiplication des figures par les nombres de 1 à 6 sans modification de la forme (XII,1) qui doit se faire au moyen du « théorème de Pythagore ». M. *Bürk* suppose du reste qu'*Apastamba* qui n'a parlé, dans la partie géométrique, de l'application de ce théorème qu'à des carrés et non pas même à des rectangles semblables, se borne dans les constructions pratiques à des multiplications de carrés. Aussi croit-il nécessaire ¹ d'expliquer autrement que comme application immédiate du théorème en question un renvoi d'*Apastamba* (XXI,8) à ce qu'il prétend avoir dit sur l'addition de rectangles.

Il s'agit de la triplification d'une figure composée d'un carré 240^2 , de deux rectangles 120×144 et d'un rectangle 120×132 . La triplification du carré se fait d'après les règles données. Pour tripler un rectangle 120×144 on a dû, selon M. *Bürk*, commencer par le transformer, lui et le rectangle double 240×144 , en des carrés (II,1) et les ajouter au moyen du « théorème de Pythagore ». (Il aurait été plus simple de transformer immédiatement le rectangle 360×144 en un carré). Il en résulte un carré que selon le procédé indiqué au n° III,1 on peut transformer en un rectangle de côté donné. Mais quel sera ce côté? De même que le côté 120 du rectangle donné est la moitié du côté 240 du carré donné, le côté correspondant du rectangle triplé doit être la moitié du côté déjà déterminé du carré triplé.

Comme *Apastamba* n'avait rien dit sur la sommation de deux rectangles semblables et qu'il renvoie expressément à ce qu'il a dit, M. *Bürk* a bien fait d'essayer de ne faire usage que de ce que son auteur a réellement énoncé. Cependant le Sulbasutra nous inspire plus de confiance dans le sens pratique de ceux qui ont trouvé les propriétés géométriques qu'il renferme, et dans leur habitude de considérer des figures composées de carrés, que dans leur faculté d'exposer bien systématiquement leur savoir. Une fois en possession d'un côté du rectangle triplé, ils auront trouvé de meilleurs moyens de construire le rectangle devant être semblable au rectangle donné, dont les côtés ont le rapport simple de 5 à 6, que la douteuse règle de III,1.

L'auteur du sulbasutra peut avoir, du reste, déterminé plus immédiatement le côté du rectangle triplé au moyen des règles données expressément. En effet, dans la première description de la figure en

¹ BÜRK, 56, p. 389.

question (VIII,2) le rectangle 120×144 est formé par le prolongement du carré 120^2 . Il a donc suffi de tripler ce carré et de le prolonger de même de sa cinquième partie, et on a pu regarder cette dernière opération comme assez simple pour négliger de la mentionner expressément. La construction obtenue de cette manière serait identique à celle qui résulterait d'une application immédiate du « théorème de *Pythagore* » à des rectangles semblables. Une multiplication d'un rectangle à côtés commensurables — et on ne parle pas d'autres — résulte aussi de celle des petits carrés dont il se compose. Quoiqu'il en soit, les commentateurs indiens d'*Apastamba* n'hésitent nullement à appliquer le « théorème de *Pythagore* » à l'addition de rectangles semblables.

Ne présentant « le théorème de *Pythagore* » et ses applications les plus immédiates qu'au milieu de vérités géométriques qui doivent avoir été connues bien avant ce théorème important, notre *sulbasutra* nous offre la meilleure occasion d'en explorer l'origine. Rappelons à cet effet la décomposition des figures planes en de petits carrés au moyen de deux systèmes de parallèles, décomposition qui donne une idée nette des aires des carrés et des rectangles dont les côtés sont des multiples de l'unité et qui réduit la détermination de ces aires à de simples dénombrements; l'usage de cette décomposition pour la détermination successive des carrés des nombres entiers, pour la représentation des différences de deux carrés sous forme de gnomons et pour la détermination des gnomons qui sont eux-mêmes numériquement des carrés, c'est-à-dire à l'invention de triangles *Pythagoriciens*; enfin l'application d'un assez grand nombre de ces triangles à des constructions d'angles droits au moyen de cordes. Il ne faut oublier non plus que l'énoncé général du « théorème de *Pythagore* » se rapporte aux côtés et à la diagonale d'un rectangle.

L'usage fréquent de triangles rectangles à côtés entiers nous fait présumer que c'est l'un d'eux qui a mis sur la trace de la découverte générale, et de même que les autres auteurs qui se sont occupés de cette question, nous attribuons à un pur hasard la première observation des valeurs des côtés de ce triangle rectangle, qui a été probablement celui des côtés 3, 4, 5. La simplicité de ces nombres donne en effet à cette hypothèse une grande probabilité qui pèse plus que le fait historique qu'un autre triangle 15, 36, 39 ou 5, 12, 13 sert à la construction la plus immédiate de l'autel indien dont la description remonte à l'époque la plus éloignée.

La division des figures en petits carrés a présenté facilement une

occasion de mesurer avec la corde¹ la diagonale d'un rectangle aux côtés 3 et 4. Alors quelqu'un a été assez intelligent pour reconnaître l'utilité de cette valeur simple, 5, pour la construction d'angles droits. Ayant sous les yeux les différents carrés composés de petits carrés on a pu découvrir que ces nombres utiles satisfont à la relation $3^2 + 4^2 = 5^2$, à la fois dans le sens arithmétique et dans le sens géométrique de cette équation. Au moyen de cordes on aura pu chercher ensuite dans la figure divisée en de petits carrés, de nouveaux rectangles $x y$ à diagonale entière z et on aura pu constater pour eux la même relation $x^2 + y^2 = z^2$. Toutefois une recherche systématique de cette nature ressemblerait trop, selon nous, à la physique expérimentale moderne. Pour être menée à bonne fin, elle doit avoir été accompagnée de quelque intelligence géométrique. Voici comment on a pu procéder en commençant par le rectangle aux côtés 3 et 4.

La figure composée de petits carrés contient immédiatement les carrés construits sur les côtés 3 et 4, tandis que les diagonales des rectangles 3. 4, ont une position oblique. Néanmoins il n'est pas difficile d'en trouver dans une figure divisée en un nombre suffisamment grand de carrés, quatre qui forment eux-mêmes un carré. Il s'est donc agi de s'expliquer le fait, probablement déjà trouvé par expérience, que ce carré contient autant de carrés-unités que les deux carrés 3^2 et 4^2 .

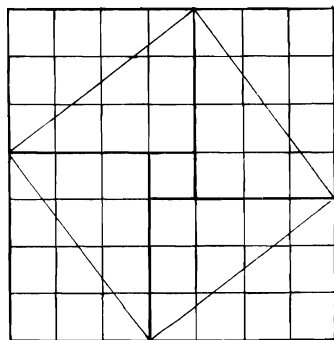


Fig. 2.

Considérons à cet effet le carré de côté 7 qui renferme le carré formé des quatre diagonales de rectangles 3. 4. La figure 2 montre immédiatement que le carré 7^2 est composé d'un carré 3^2 , d'un carré 4^2 et de deux rectangles 3. 4 (comparer Apastamba III,9). En même temps il est composé du carré formé des diagonales et de quatre moitiés de rectangles 3. 4. Il en résulte que le carré de la diagonale est égal à la somme de $3^2 + 4^2$, et comme cette somme est égale à 5^2 , que la diagonale cherchée est égale à 5.

La même figure a pu être utilisée autrement. Le carré des diagonales

¹ M. BÜRK semble également supposer un semblable mesurage fortuit (55, p. 568).

nales contient quatre moitiés de rectangles 3, 4 et le petit carré 1^2 . De même les carrés 3^2 et 4^2 placés l'un à côté de l'autre en deux coins du carré 7^2 se composent de deux rectangles 3, 4 et du petit carré 1^2 .

Pour avoir le théorème général de Pythagore, il suffit à présent de remplacer 3 et 4 par deux quantités quelconques a et b , 7 par $b + a$ et 1 par $b - a$. Sans doute, dans ces temps reculés, on était trop peu habitué à l'abstraction géométrique pour tirer immédiatement cette conclusion générale, ou du moins pour la formuler. On s'y est donc élevé successivement par la considération d'autres rectangles particuliers et tels qu'à la fois les côtés étaient des nombres entiers et la somme de leurs carrés le carré d'un entier. A cet effet on a cherché différents groupes de tels nombres. S'étant persuadé que, dans ces cas, les mêmes décompositions et les mêmes dénombrements de petits carrés conduisent à une loi unique on ne se sera fait aucun scrupule d'étendre cette loi à tous les autres rectangles. Et de plus, avant la découverte des quantités irrationnelles on n'aura pas hésité à croire que toujours il était possible d'exprimer les trois côtés d'un triangle comme des multiples entiers d'une unité assez petite; nous parlerons plus tard des efforts faits à cet égard. Voilà donc comment *Baudhayana*¹ a pu regarder un renvoi aux triangles aux côtés 3 et 4; 12 et 5; 15 et 8; 7 et 24; 12 et 35; 15 et 36 comme démonstration du théorème général de Pythagore. Il n'en cite pas les hypoténuses, dont les valeurs se sont présentées comme résultats des opérations.

L'explication de la découverte du « théorème de Pythagore » à laquelle nous sommes conduits ici par l'étude des *sulbasutras* n'est ni nouvelle ni bornée aux Indiens. M. *Cantor* a fait remarquer² qu'une figure qui selon *Biot*³ se trouve dans l'antique ouvrage chinois inti-

¹ Voir l'article de M. THIBAUT dans le *Journal of the Asiatic Society of Bengal*, p. 235, 1875.

² *Geschichte*, I, p. 637.

³ *Journal Asiatique*, 1841, p. 601, note 1 : « Dans toutes les trois figures, on voit un grand carré divisé en 49 parties, dans lequel est inscrit un autre carré divisé en 25 parties. Ce second carré est divisé, dans la première figure, en quatre triangles rectangles, plus un carré intérieur, dans la seconde il contient un carré de 9 parties, dans la troisième, il contient un carré de 16 parties. » La première de ces figures doit être identique à la nôtre. Le but des deux autres figures est probablement de montrer que la soustraction des carrés $5^2 - 3^2$ ou $5^2 - 4^2$ (représentés géométriquement) laisse une figure (gnomon?) composée de, respectivement, 4^2 ou 3^2 unités carrées. Du reste ces trois figures méritaient bien d'être publiées.

tulé *Tcheou pei* doit être identique à notre figure 2. Elle appartient à une partie de l'ouvrage qu'on a voulu dater de 1100 avant Jésus-Christ; mais cette partie a subi une revision d'où dérive peut-être la figure. Toutefois l'ancien texte ¹ a contenu une mention du triangle rectangle de côtés 3, 4, 5 et de son application à des constructions d'angles droits et il l'a attachée à la division de carrés en petits carrés. Il est vrai qu'on commence par le carré 9², qui n'a ici aucun usage immédiat; mais selon un commentateur ce carré ne doit servir que d'exemple de carrés divisés. On a donc eu un point de départ semblable à celui des Indiens. La figure peut indiquer une ancienne démonstration chinoise, ou, peut-être, si elle n'a été introduite que par la revision déjà mentionnée, serait-elle due à une influence indienne.

On retrouve, comme le remarque aussi M. Cantor², notre carré intérieur, décomposé en quatre triangles et un petit carré dans les démonstrations d'*Abûl Wafa* et de *Bhaskara*. Bien entendu, ces auteurs d'époques où l'on connaissait depuis longtemps le théorème général ne se bornent nullement à des triangles de côtés commensurables. C'est aussi par une transposition géométrique beaucoup plus moderne qu'*Abûl Wafa*, qui s'adresse à des ouvriers curieux de comprendre un procédé pratique, transforme la somme de deux carrés en un carré décomposé de la manière indiquée, tandis que *Bhaskara* se contente d'inviter les lecteurs à regarder sa figure. De même que M. Cantor nous croyons que le savant arabe, aussi bien que le savant indien doivent leur figure à une ancienne tradition indienne.

C'est encore essentiellement le même procédé qui, selon une supposition de M. Bretschneider, aurait conduit *Pythagore* à la découverte du théorème qui porte son nom. Cette hypothèse peut s'appuyer sur les divisions de carrés en carrés et rectangles du second livre d'*Euclide*. Toutefois voulant avant tout donner des démonstrations indépendantes de la commensurabilité des côtés des différentes figures, *Euclide* ne décompose pas les figures en petits carrés égaux; mais l'intérêt que portèrent aussi les Grecs à la recherche des triangles rectangles des côtés rationnels, indique que la division en parties égales a été en usage avant lui. Ayant démontré dans son premier livre le « théorème de Pythagore » à sa propre manière, *Euclide* n'y revient pas de nouveau, mais cela n'empêche pas de

¹ Journal Asiatique, p. 599-600, 1841.

² *Geschichte*, p. 601 et 614.

³ *Die Geometrie vor Euklid*, p. 82

chercher dans les décompositions de son deuxième livre le point de départ de la démonstration qui avait précédé la sienne. Remarquons à cet égard que le théorème 8 exprime dans notre langage symbolique la relation $(b + a)^2 = (b - a)^2 + 4ab$, ou bien la décomposition de notre grand carré (7^2 dans la fig. 2) en quatre rectangles $a b$ et un petit carré. Le carré qui reste en en soustrayant les moitiés des quatre rectangles $a b$, ou bien notre carré inscrit formé des diagonales des quatre rectangles, sera donc égal à $(b - a)^2 + 2 a b$ ou bien, selon le n° 7 du même livre, à $b^2 + a^2$.

Néanmoins, précisément la circonstance que les théorèmes du second livre sont assez généraux pour rendre indépendante de la commensurabilité des côtés une démonstration appuyée sur ces théo-

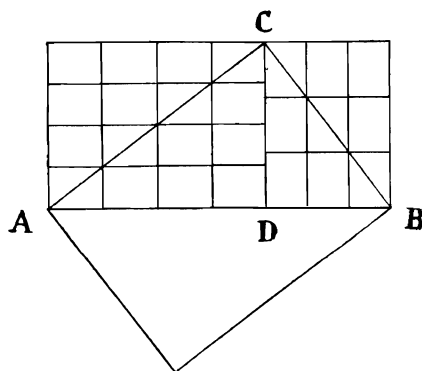


Fig. 3.

èmes, donne lieu à des objections contre l'hypothèse de M. Bretschneider. On sait, en effet, que la démonstration du « théorème de Pythagore » dans le premier livre d'Euclide est due à cet auteur lui-même, et la nécessité d'une nouvelle démonstration s'expliquerait d'une manière assez plausible par l'introduction dans les *Eléments* de la théorie rigoureuse des proportions due à *Eudoxe*. Or cette théorie et ses applications ne se

trouvent que dans les V^{me} et VI^{me} livres d'Euclide, tandis qu'il avait besoin antérieurement du « théorème de Pythagore ». Dès lors si la démonstration connue avant *Euclide* dépendait des proportions, elle manquait la rigueur qu'il recherchait, et il ne lui était pas possible de suppléer à ses défauts dès le premier livre. Il fallait donc lui en substituer une autre.

Ces considérations conduisent à attribuer aux Grecs avant *Euclide* une démonstration dépendant de la théorie des proportions, imparfaite à cette époque. Dès lors il faut penser en première ligne à la similitude des triangles ACD et CBD, fig. 3, qu'on obtient en abaissant la perpendiculaire CD du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle ABC sur l'hypothénuse tant entre eux qu'avec le triangle ABC. *Euclide* démontre (VI, 8) l'égalité des angles de ces triangles, ce qui lui aurait été possible dès le premier livre, et il en

conclut la proportionnalité de leurs côtés, conclusion qu'on n'avait pas besoin de rejeter si loin tant qu'on n'avait pas égard aux cas où les côtés étaient incommensurables. On sait que ces proportions amènent l'égalité des deux carrés des côtés de l'angle droit aux deux rectangles qu'on obtient en partageant le carré de l'hypoténuse au moyen du prolongement de la perpendiculaire CD abaissée sur l'hypoténuse. Et c'est précisément ces égalités qu'*Euclide* démontre dans I, 47, mais d'une manière indépendante de la théorie des proportions.

Remarquons, afin d'épuiser le mieux possible les voies qui ont pu conduire à la découverte du « théorème de Pythagore », que même longtemps avant *Euclide* on aura pu avoir une idée de la similitude des mêmes triangles et en profiter sous une forme ou une autre. Pour cela on n'a pas même eu besoin de la notion *expresse* de la grandeur d'un angle : c'est au contraire l'idée générale de similitude qui a montré l'utilité de cette catégorie¹. Du reste, dans la démonstration rigoureuse de la similitude nous faisons même aujourd'hui usage d'un postulat regardé comme plus simple ; mais ce postulat lui-même est emprunté originairement à des cas plus concrets tels que ceux que présente notre figure.

Sans doute, pour commencer, on n'aura su profiter des proportions exprimant cette similitude qu'en des cas où les côtés ont des rapports très simples tels que celui où les côtés BC et CA sont égaux à 3 et 4, et alors en menant effectivement les parallèles montrant la proportionnalité des côtés et des segments, ou peut-être celles qui divisent les rectangles en parties égales. Dans le dernier cas fig. 3^e, on voit que le rectangle ayant BC pour diagonale est composé de neuf petits rectangles et le rectangle ayant CA pour diagonale de 16. Or $\triangle BCD + \triangle CDA = \triangle BAC$. Donc le rectangle ayant l'hypoténuse AB pour diagonale doit se composer de vingt-cinq petits rectangles de la même grandeur et par conséquent $AB = 5$. On pourra appliquer la même démonstration à tous les triangles rectangles dont les côtés sont exprimables par des nombres entiers, mais seulement indirectement aux autres.

¹ HANKEL, *Geschichte*, p. 76 se sert à peu près de la même figure pour expliquer la découverte de la somme des angles d'un triangle. On n'a donc pas — aussi selon lui — eu besoin de connaître cette somme pour découvrir la similitude de nos triangles ou rectangles. Remarquons encore que dès la première observation de l'angle droit d'un triangle aux côtés 3, 4, 5 il dut s'y joindre la connaissance que cette détermination est indépendante de l'unité de longueur.

Nous ne savons pas si la connaissance du « théorème de Pythagore » a une origine unique, ou s'il y a eu plusieurs découvertes indépendantes ni, dans le dernier cas, si on y est parvenu de la même manière ou par des procédés différents. Ceux-ci peuvent avoir pris des formes plus ou moins semblables à ceux dont nous avons parlé; mais en tout cas nous croyons que les voies doivent avoir suivi l'une ou l'autre des deux directions que nous avons indiquées. Quoiqu'il en soit nous avons du moins montré comment il a été possible de s'élever au théorème général en commençant par considérer des triangles rectangles de côtés entiers. Ce qui a laissé au contraire des traces plus sûres, c'est l'usage originaire de ces triangles. On les découvre dans les géométries anciennes que nous connaissons le mieux : la géométrie indienne et la géométrie grecque. Et elles s'y montrent premièrement à la manière dont on traite du triangle rectangle et isocèle. Que le théorème y était applicable dans sa forme géométrique, voilà ce qui était presque immédiatement évident. Comment donc y appliquer aussi sa forme arithmétique?

Du côté des *Indiens* nous avons trouvé une réponse à cette question dans *Āpastamba* I, 5 qui nous apprend que la diagonale d'un carré de côté c est $\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}\right)c$. Que cette excellente approximation soit regardée comme une expression exacte ou approchée de $\sqrt{2}$, elle substitue à la diagonale un segment commensurable aux côtés, ce qui permet d'y appliquer aussi la forme arithmétique du « théorème de Pythagore », et rendrait possible la décomposition du carré de la diagonale en un nombre de petits carrés égaux, double de celui dont se compose le carré donné.

Cependant nous ignorons comment on a trouvé cette approximation. Il aurait été possible d'y arriver en mesurant simplement la diagonale d'un carré au moyen d'une corde ayant la longueur du côté. Alors, ayant vu qu'elle est plus grande que cette corde, on aura, pour en mesurer le reste, mis la corde en deux et puis en trois et vu ainsi que ce reste est un peu plus grand que la troisième partie de la corde. En mettant ensuite cette troisième partie en deux, en trois et en quatre on aura vu que ce qui restait encore est un peu plus petit qu'un quart de la troisième partie, et en essayant de mesurer de même ce qui manquait à la diagonale pour être $c\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4}\right)$, on aura trouvé que ce défaut est égal à $\frac{1}{34}$ de la dernière mesure employée. Avec une corde assez fine on a très bien pu faire ces mesures de la

diagonale d'un carré assez grand et alors on aura pu regarder ces mesures comme exactes.

Je suis toutefois plus disposé à croire que même à cette époque reculée, les Indiens ont été d'assez bons calculateurs pour trouver arithmétiquement la valeur approchée de $\sqrt{2}$. Dans ce cas le résultat a pu assez naturellement prendre la forme indiquée par *Apastamba*. En effet, si l'on a commencé par essayer de donner à la fraction qu'il faut ajouter à 1 pour avoir $\sqrt{2}$ la valeur de $\frac{1}{3}$, les deux corrections suivantes $\frac{1}{3.4}$ et $-\frac{1}{3.4.34}$ seront des conséquences presque immédiates de ce que

$$\sqrt{2} = a \pm x$$

amène

$$2 = a^2 \pm 2ax + x^2.$$

En y substituant successivement $a = 1 + \frac{1}{3}$ et $a = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4}$ et en négligeant le terme x^2 , on trouvera, respectivement pour les signes + et —, $x = \frac{1}{3.4}$ et $x = \frac{1}{3.4.34}$. Or *Apastamba* connaît sous forme géométrique la formule

$$(a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2,$$

et

$$(a - x)^2 = a^2 - 2ax + x^2,$$

n'est qu'une autre interprétation de la même figure géométrique (celle où a remplace $a + x$ et $a - x$ remplace a). On a donc pu attacher le calcul que nous venons d'indiquer à cette même figure, en cherchant avec son aide les corrections x qu'il faut ajouter à, ou soustraire de la valeur a , pour obtenir le côté d'un carré s'approchant davantage de $\sqrt{2}$.

En négligeant le petit carré x^2 on a dû voir qu'en faisant ce calcul on n'obtenait qu'une approximation de plus en plus grande; mais les Indiens ne se sont sans doute jamais posé la question plus abstraite de savoir s'il était en vérité absolument impossible de trouver une fraction numérique égale à $\sqrt{2} - 1$. L'approximation sans limites leur suffisait et pouvait leur suffire dans toutes les applications de

leurs calculs. Aux époques plus historiques ils ont gardé les mêmes points de vue. Les propriétés des figures dites « trapèzes de Brahmagoupta » sont montrées pour des cas de côtés entiers et permettant une facile exécution de tous les calculs; on y était assez versé pour voir que les mêmes calculs étaient possibles et par conséquent les mêmes résultats justes, si les côtés avaient d'autres valeurs commensurables. Cela leur suffisait pour établir des propriétés exprimant les formules fondamentales de la trigonométrie ($\sin(x + y)$, etc.)¹.

Dans la *géométrie grecque* les efforts pour calculer numériquement la diagonale d'un carré ont laissé des traces encore plus importantes. C'est à eux que se rattache la première connaissance de quantités incommensurables que nous rencontrons dans l'histoire, et cette connaissance a provoqué ensuite les démonstrations géométriques que nous devons aux Grecs.

Sans doute on a essayé de calculer exactement $\sqrt{2}$, et de même que les Indiens on n'en a trouvé que des approximations — dont nous allons parler tout à l'heure; — mais alors on s'est demandé si cela dépendait seulement de la méthode choisie ou de la nature de la question. On a fini par trouver la démonstration de la seconde alternative. Elle a été placée, dans la plupart des éditions d'Euclide, à la fin du dixième livre. Selon M. Heiberg² cette place n'est pas justifiée, mais *Aristote* parle de cette démonstration³ d'une manière qui montre qu'elle a été bien connue avant lui. On peut la rendre à peu près de la manière suivante. Si la diagonale a un rapport numérique au côté et que $d : c$ soit l'expression la plus simple de ce rapport, on aura $d^2 = 2c^2$. Il en résulte que d est un nombre pair et par conséquent c un nombre *impair*. Or c aura le même rapport à $\frac{d}{2}$. Il en résulterait que c est *pair*. La supposition est donc impossible.

Après cette découverte on devait se contenter d'inventer, pour le calcul de la diagonale ou de $\sqrt{2}$, des procédés d'approximation succes-

¹ Voir un article sur *l'arithmétique géométrique des Grecs et des Indiens* que je viens d'insérer dans la *Bibliotheca mathematica* (3), V, p. 110.

² *Euclide*, III, p. 27.

³ 41^o24. M. ALLMAN, *Greek Geometry*, p. 43, pense que la forme d'une réduction à l'absurde empêche d'attribuer cette démonstration à *Pythagore*; mais on a pu très bien revêtir après lui un raisonnement déjà connu d'une forme plus à la mode. De telles formes générales succèdent toujours dans l'histoire des mathématiques à quelques-unes de leurs plus utiles applications particulières.

sive et le soin qu'on y a apporté montre l'intérêt qu'on attachait précisément à cette quantité irrationnelle. En ayant parlé dans mon *Histoire des Mathématiques*¹ je n'y reviendrai pas ici; je me contente de rappeler qu'il s'agit d'applications des deux théorèmes II, 9 et 10 d'*Euclide* exprimant que quatre points A, B, C, D d'une droite dont C est le milieu de AB satisfont à l'équation

$$AD^2 + DB^2 = 2 AC^2 + 2 CD^2,$$

et de souligner que, conformément à leur destination, *Euclide* rattache leur démonstration à la considération des projections de segments de côtés d'un triangle rectangle et isocèle sur l'hypoténuse, quoiqu'il eût pu très bien y parvenir par les divisions de carrés au moyen de parallèles aux côtés dont il s'était servi dans les démonstrations précédentes du même livre.

Après la découverte des quantités incommensurables, il devenait nécessaire de rendre les démonstrations et les opérations mathématiques indépendantes de la division des différentes quantités en nombres finis de parties égales. La représentation géométrique dont on se servait déjà y offrait un beau moyen, car deux segments de droites représentent aussi bien des quantités incommensurables que des quantités commensurables. Nous avons vu que les auteurs des *Sulbasutras* savaient aussi réduire la transformation d'un rectangle en un carré à une application du « théorème de Pythagore » (*Apastamba* II, 7), mais que leur solution du problème inverse (III, 1) n'est applicable qu'à des figures données numériquement; nous avons ainsi montré qu'on ne s'était pas encore élevé à la généralité géométrique. De même les opérations géométriques des successeurs indiens de ces auteurs ont toujours en vue des figures numériquement données. *Euclide*, au contraire, profite de la représentation géométrique pour

¹ *Antiquité et Moyen Age*, resp. p. 51, 58 et 58 dans les éditions danoise, allemande et française. Il s'agit du calcul de $\sqrt{2}$, rapporté par THEON DE SMYRNE, dont M. PAUL TANNERY avait montré (*Revue philosophique*, LXI, p. 291) qu'il était connu avant l'époque de *Platon*. Dans mon livre sur la théorie des coniques dans l'antiquité (édition danoise, 1885, p. 25; édition allemande, p. 28) j'avais remarqué que les théorèmes 9 et 10 du livre II d'*Euclide* contiennent précisément la démonstration de cette méthode. Peu après, et indépendamment de moi, M. BERGH a fait la même remarque (*Schlömilch Zeitschrift*, XXXI, h. I. Abt., p. 135), et enfin M. HULTSCH a montré (*Bibliotheca mathematica* (3), I, p. 83), comment, selon *Proclus*, les Grecs depuis les Pythagoriciens ont fait effectivement l'usage des deux théorèmes que j'avais indiqué.

rendre ses démonstrations et opérations, même celles qu'on trouve dans son second livre et qui sont de nature algébrique, également applicables à des quantités commensurables et incommensurables. On sait que ces opérations s'étendent jusqu'à la solution des équations du second degré. Il a même poussé la généralité de sa représentation si loin que de notre temps il a fallu découvrir¹ qu'à son époque on savait bien résoudre des équations numériques par les procédés qu'il donne sous forme géométrique.

Cet emploi de la représentation géométrique semble remonter jusqu'aux Pythagoriciens : Il règne dans les premiers livres d'*Euclide*, mais à partir de son cinquième livre nous rencontrons une théorie des proportions, suivie de leurs applications, également construite pour les quantités commensurables et pour les incommensurables.

¹ C'est avant tout M. Paul TANNERY qui l'a constaté par la considération du 10^{me} livre d'*Euclide*. Je renvoie du reste à mon *Histoire des mathématiques* où je montre en détail ce caractère de la Géométrie grecque qui dérive de la découverte des quantités incommensurables. Dans sa seconde partie je m'occupe aussi de la manière dont ce caractère s'est propagé ou modifié dans les temps modernes.

