# Математическое доказательство как форма апелляции к научному сообществу[1]

В.А. БАЖАНОВ

В статье анализируются доказательство и аргументация (в основном в области математики и логики) как формы апелляции к научному сообществу, имеющие глубокий этический смысл. Доказательство представляется как преимущественно форма убеждения научного сообщества, а не процесс поиска истинного знания, как инструмент, благодаря которому берется ответственность за правильность тезиса доказательства, обычно возникающего в результате озарения.

***Ключевые слова***: *аргументация, доказательство, научное сообщество, ответственность, убеждение.*

## Доказательство как важнейший компонент математической аргументации

В самой сердцевине рационально понимаемой науки лежит мощ-

[1] Статья подготовлена при поддержке РГНФ, проект № 10-03-00540а, и ФЦП Министерства образования и науки РФ «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.

ная система аргументации, вовлекаемая в процесс обоснования тех или иных положений. Эта система многоаспектна, динамична и многомерна; ее влияние затрагивает любую «клеточку» научного знания в той мере, в какой все «тело» науки пронизано рациональными процедурами выведения и обоснования нового знания. Важнейший момент здесь – процедуры доказательства.

Не случайно еще Г.А. Брутяном подчеркивалось, что «во всякой аргументации мы имеем дело прежде всего с доказательством»[2]. Здесь имеется в виду логический аспект аргументации и логическое доказательство, хотя аргументация и логическое доказательство не тождественны, поскольку именно «выбор социальной позиции обусловливает стратегию аргументации»[3]. Однако социальный аспект определенным образом может относиться и к собственно логическому доказательству, понимание которого лишь как упорядоченной цепочки символов было бы весьма зауженным, если не сказать ущербным. Постараемся это положение обосновать.

Что такое доказательство? Казалось бы, здесь нет ничего неясного. В логике принято считать доказательством некоторую конечную последовательность формул, в которой любая формула есть либо аксиома, либо следствие из каких-то предыдущих формул, полученное по одному из правил вывода. Тридцать лет назад М. Клайн констатировал, что «больше всего разногласий вызывает вопрос о том, *что такое математическое доказательство*»[4]. Этот вопрос не нашел однозначного решения до настоящего момента. Природа и смысл математического доказательства весьма оживленно обсуждаются в математическом сообществе и за его пределами[5]. Здесь нет ничего удивительного: математика и поныне является «царицей наук», которая энергично обновляется и совершает экспансию в ранее нетипичные для нее области, например в расшифровку человеческого генома, моделирование апоп-

[2] *Брутян Г.А.* Аргументация // Вопросы философии. 1982. № 11. С. 47.

[3] *Касавин И.Т.* Текст. Дискурс. Контекст. М., 2008. С. 64.

[4] *Клайн М.* Математика. Утрата определенности. М., 1984. С. 359.

[5] См.: *Целищев В.В.* Эпистемические критерии доказательства // Философия науки. 2006. № 4. С. 20–44; *Он же.* Эпистемология математического доказательства. Новосибирск, 2006; *Jaffe A.* Proof and Evolution of Mathematics // Synthese, 1997. Vol. 111, № 2. P. 133–146; *Lucas J., Redhead M.* Truth and Provability // British Journal for the Philosophy of Science. 2007. Vol. 58. P. 331–332; *Lolli G.* Experimental Methods in Proof // Deduction, Computation, Experiment. Exploring the Effectiveness of Proof. ; eds. R. Lupacchine, G. Corsi. Springer, 2008; *MacEvoy M.* The Epistemic Status of Computer-assisted Proofs // Philosophia Mathematica. 2008. Vol. 16. P. 374–387.

тоза, синдрома Дауна или распознавание почерка[6]. Впрочем, на сей счет встречаются и пессимистические суждения, основанные на теоретико-множественных соображениях и заключающиеся в том, что математики могут доказать лишь малую часть истинных предложений даже для области целых чисел и потому наступает «закат славной эпохи, открытой (древними. – *В.Б.*) греками», хотя и выражается надежда, что «жизнь математики долгая и мы не достигнем тупика в течение многих поколений исследователей»[7]. Весьма значителен интерес к математическому доказательству даже психологов, которые усматривают принципиальные различия в дедуктивных рассуждениях, составляющих основу математического (логического) доказательства и процесса естественного человеческого рассуждения[8].

Глубинную сущность математики часто усматривают в той роли, которую занимает в ней доказательство. Однако понятие доказательства выходит далеко за границы собственно математического знания, хотя важнейшие свойства доказательства, конечно же, наиболее отчетливо проявляются именно в математике. Аргументация и доказательство являются универсальными процедурами, которые охватывают самые различные предметные области, лишь одной из которых выступает математика. И в самой математике постоянно переосмысливаются статус и природа доказательства как чисто формальной операции, осознается значение содержательных, интуитивных компонентов рассуждений и укрепляется убеждение, что неформальное доказательство по-прежнему чрезвычайно важно и в эпоху торжества формальных методов вовсе не уступает место последним[9]. Открытия ограничительных теорем метаматематики серьезно подточили ту философскую норму, которая являлась стержнем парадигмы рациональности XIX и

[6] *Glimm J.* Mathematical Perspectives. Reflections and Prospectives // Bulletin of the AMS. 2010. Vol. 47, № 1. P. 127–136.

[7] *Cohen P.J.* Skolem and Pessimism About Proof in Mathematics // Philosophical Transactions of the Royal Society. A. (Mathematical, Physical and Engineering Sciences). 2005. Vol. 363. P. 2414, 2418.

[8] *Rips L.J.* The Psychology of Proof. Cambridge (MA) : MIT Press, 1994; *Rips L.J.* Logical Approaches to Human Deductive Reasoning // Reasoning. Studies of Human Inference and Its Foundations ; eds. J.E. Adler, L.J. Rips. Cambridge : Cambridge University Press, 2008. P. 187–205.

[9] *Anellis I.* Mathematical Proof *vs*. Logical Proof // Философия математики. Актуальные проблемы: Тезисы второй международной конф. 28–30 мая 2009 г. в МГУ. М., 2009. С. 154–155; *Bundy A., Jamnik M., Fugard A.* What is Proof? // Philosophical Transactions of the Royal Society. A. (Mathematical, Physical and Engineering Sciences). 2005. Vol. 363. P. 2377–2391; *Lowe B., Muller T.* Degrees of Belief and Knowledge in Mathematics. ILLC Publications, 2004 (preprint X-2004-03).

начала XX в. и которая была принята в течение двух тысячелетий. Если, согласно этой норме, «предполагалось, что сама природа математической истины состоит в ее доказуемости»[10], по словам Р. Дедекинда «ничто, что в науке доказуемо, не должно приниматься без доказательства»[11], то развитие математики XX в. привело к необходимости переосмыслить эту норму в направлении учета более сложного и противоречивого характера доказательства, связанного с его включенностью в социальный и психологический контексты, контекст поиска математической истины, достигаемой как результат нетривиальных когнитивных процедур и особого типа креативности. «Понятие доказательства не принадлежит математике (математике принадлежит лишь его формальная модель – формальное доказательство), – пишет В.А. Успенский. – Оно принадлежит логике, лингвистике и больше всего психологии»[12].

Новая философская норма, сменившая безбрежный гносеологический оптимизм Д. Гильберта и ныне лежащая в основаниях математики, повлекла существенные изменения в стандартах самих логических и, что более заметно, математических доказательств. Новые нормы доказательности стали возникать в качестве «контрустановок» к тем стандартам традиционной математической доказательности, в которых строгость рассуждений доминировала над прикладной ценностью. Так, в теории катастроф принимался «ценз» доказательности, который был, по замечанию В.И. Арнольда, «неправдоподобно (…к традиционному) низок»[13]. Р. Том отмечает, что когда он стал коллегой А. Гротендика, то его пример «вдохновил меня (Р. Тома. – *В.Б.*) рассматривать строгость как довольно ненужную деталь математического мышления… Я до сих пор верю, что строгость – относительное, а не абсолютное понятие. С момента крушения программы Гильберта мы знаем, что строгость может быть не более чем локальным и социологическим критерием»[14].

Такое снижение «ценза» доказательности обычно сопряжено с периодом бурного развития дисциплины, характерного своим невниманием к строгости, и оно время от времени наблюдается в тех или иных разделах математики. Например,

---

[10] *Куайн У.А.* Основания математики // Математика в современном мире. М., 1967. С. 108.

[11] Цит. по: *Webb J.C.* Mechanism, Mentalism, and Metamathematics. Dordrecht, 1980. P. IX.

[12] *Успенский В.А.* Семь размышлений на темы философии математики // Закономерности развития математики. М., 1987. С. 139; см. также: *Он же.* Труды по нематематике. М., 2002. С. 95; *Он же.* Простейшие примеры математических доказательств. М., 2009. С. 7.

[13] *Арнольд В.И.* Теория катастроф. М., 1983. С. 10.

[14] *Thom R.* Comments // Bulletin of the AMS. 1993. № 1. P. 25.

«к середине XIX в. значение доказательства упало настолько, что некоторые математики не считали необходимым проводить полные доказательства даже в тех случаях, когда это было возможно». То, чем оперировали тогда математики, «правильнее было бы назвать лишь обрывками рассуждений»[15]. Между тем – что может вызывать, конечно, удивление – даже в математике XVIII в. число ошибочных рассуждений было невелико; работала безошибочная интуиция[16].

Именно в неформальных компонентах математического рассуждения и доказательства усматривал гарантию их эффективности И. Лакатос. Он противопоставлял *дедуктивистский* и *эвристический подходы.* Первый культивирует «авторитарную» атмосферу в математике, превращая ее в скопище «священных» непререкаемых истин, лишает понятия, порожденные доказательствами, их предшествующей истории, трактует их как рожденные из «вакуума», искусственные. Он скрывает борьбу мнений в истории математики. Второй же, напротив, подчеркивает именно указанные факторы. Он делает акцент на проблемной ситуации: рельефно представляет «логику», благодаря которой родилось новое понятие[17]. Дедуктивистский подход способствует, согласно Лакатосу, «вырождению» математики... когда математический стиль приобретает черты перерождения в барокко, то это следует расценивать как сигнал опасности[18].

И сейчас многие видные математики достаточно прохладно относятся к соображениям строгости доказательства и подчеркивают богатство неформальных процедур доказательства: «львиная доля математических рассуждений представляет собой общие математические характеристики, которые неуловимы формальными средствами» (Г. Крайзел[19]), «сейчас математическая практика говорит в пользу того, что важнейшее понятие доказательства в математике не есть логический вывод, а неформальное доказательство» (Б. Лёв, Т. Мюллер[20]),

[15] *Клайн М.* Указ. соч. С. 193, 197.

[16] *Grabiner J.* Is Mathematical Truth Time-Dependent? // Mathematical Monthly. 1974. Vol. 81. № 4. P. 358.

[17] *Лакатос И.* Дедуктивистский эвристический подход // Эпистемология и философия науки. 2009. Т. XX, № 2. С. 211, 213; см. также: *Бажанов В.А.* Неизвестный Лакатос // Эпистемология и философия науки. 2009. № 2. С. 204–209.

[18] *Лакатос И.* Процедуры доказательства в современном математическом анализе // Вопросы философии. 2009. № 8. С. 97; см. также: *Бажанов В.А.* Переосмысливая И. Лакатоса заново // Вопросы философии. 2009. № 8. С. 92–97.

[19] Цит. по: *Rav Y.* A Critique of a Formalist-Mechanist Version of the Justification of Arguments in Mathematicians' Proof Practices // Philosophia Mathematica. 2007. Vol. 15. P. 291.

[20] *Lowe B., Muller T.* Op. cit. P. 3.

«полная формализация и полное доказательство если и возможны в принципе, то невозможны на практике» (Р. Херш[21]). На крайнюю важность неформальных доказательств в современной математике обращают внимание многие математики, а на неизбежное – сознательное или бессознательное – наличие важных смысловых пробелов в доказательствах (Д. Фаллис[22]). В связи с бурным развитием паранепротиворечивых систем возникла возможность утверждать, что некоторое положение не просто доказано или же не является доказанным, а доказано, например, на «60 %» в том, по Лакатосу, смысле, что появление контрпримеров по отношению к данному положению делает его доказательство не абсолютным, а относительным, отвечающим концепции фоллибилизма и признающим метод проб и ошибок имманентным и для развития математики[23]. Так, доказательство знаменитой гипотезы Кеплера Т. Хейлсом в 1998 г. расценивается как верное на 99 % потому, что 250 страниц аналитического доказательства (сведенного до 100 страниц в 2005 г.) дополняется сложными программами, которые перебирают множество вариантов на компьютере, составляя в общей сложности объем 3 Гб[24].

Казалось бы, прогресс математики вполне обеспечивается неформальными доказательствами – будь то «обычная» или паранепротиворечивая математика.

И тем не менее в математике не ослабевают усилия, связанные с поиском все более и более строгих доказательств. Разрабатываются компьютерные методы поиска формальных доказательств, которые позволили бы проверить полученные аналитическим путем доказательства. Причем новые подходы к построению формальных доказательств расцениваются не ниже, чем третья с момента рождения этой науки революция[25].

Формальные доказательства (в которых часто используются методы раздела математической логики, называемого теорией доказательства, восходящей к стремлению Гильбер-

---

[21] *Hersh R.* Proving is Convincing and Explaining // Educational Studies in Mathematics. 1993. Vol. 24, № 4. P. 391.

[22] *Fallis D.* Intentional Gaps in Mathematical Proofs // Synthesis. 2003. Vol. 134. P. 45–69.

[23] См.: *Priest G.* 60 % Proof. Lakatos, Proof, and Paraconsistency // Australian Journal of Logic. 2007. № 5. P. 89.

[24] Стоит обратить внимание, что 3 Гб для данного момента развития информационных технологий представляло собой внушительный объем. Это доказательство уже имеет и аналог в виде формального доказательства.

[25] *Harrison J.* Formal Proof – Theory and Practice // Notices of the AMS. 2008. Vol. 55, № 11. P. 1413–1414. Первая революция, по мнению Дж. Харрисона, была обусловлена открытием самой процедуры доказательства в Древней Греции и появлением «Начал (Элементов)» Евклида. Вторая состояла в строгом обосновании анализа О. Коши.

та обосновать математику финитными средствами) помогают реорганизовать неформальные доказательства таким образом, что из них можно извлечь бóльшую информацию, в частности о том, какова наиболее простая система, которая допускает формализацию последних.

Что заставляет математиков столь пристально вглядываться в феномен доказательства и разрабатывать все более «изощренные» способы формальных доказательств? Не напрасны ли их усилия? Какие подспудные мотивы лежат в их основе? Какие причины придают смысл (причем глубокий смысл) поиску сложнейших доказательств как не праздной игре ума?

Феномен доказательства вызывает громадный интерес не только у математиков. С 2000 г. на Бродвее в одном из театров играется пьеса Дэвида Оберна «Доказательство», получившая премии «Тони» и Пулитцеровскую; в 2006 г. киностудия Miramax поставила фильм «Доказательство»[26] (режиссер Джон Мэдден) с участием кинозвезд Гвинет Пэлтроу, Энтони Хопкинса и Джейка Гилленхала; весной 2010 г. известный польский режиссер Кшиштоф Занусси поставил эту же пьесу в Российском молодежном театре в Москве; 16 июня 2003 г. по отечественному телевидению прошла передача-беседа А. Гордона о доказательности в математике с академиком РАН Ю.Л. Ершовым. Одним словом, феномен доказательства имеет общекультурный (даже специфический цивилизационный) характер. Поэтому, думается, истолкование доказательства как социальной и этической процедуры имеет значение, выходящее за пределы собственно математики как науки о порядке и отношениях, возникшей в процессе развития практики вычислений, измерений и описания форм (реальных и абстрактных) объектов, отношений между ними и основанной на (логических) доказательствах и численных выкладках.

## Доказательство в контексте «неформальной» логики

Тот факт, что понятие доказуемой истины у́же понятия содержательной истины, явился одной из причин переоценки

[26] См. рецензию на этот фильм: *Ullman D.* Review of Proof // Notices of AMS. 2006. Vol. 53, № 3. P. 340–342. Прототипом главного героя этой пьесы, как и в случае книги С. Назар и громкого фильма Р. Ховарда «A Beautiful Mind» (в российском прокате «Игры разума»), стал Дж. Нэш, лауреат Нобелевской премии по экономике, гениальный математик, который был болен шизофренией.

границ применимости дедуктивных методов познания. Обоснованные сомнения в том, что строгие дедуктивные методы рассуждений способны воссоздать и промоделировать всю или даже сколько-нибудь значительную часть рационального дискурса (не упоминания интуитивных суждений), привели к довольно интенсивному развитию теории аргументации и риторики, к попыткам построения так называемой неформальной логики. В известной мере вопреки традиции математической логики здесь высказывается убеждение, что «неформальные ошибки составляют законный базис для логического исследования» и что «теоретическое воспроизведение способов рассуждения и логического критицизма в неформально-логических терминах имеет прямой выход для таких разделов философии, как эпистемология, этика и философия языка»[27]. Более того, некоторые ученые, работающие в русле неформальной логики, оценивают свою деятельность как «стремление спасти логику от безумия (вызываемого, как они считают, отрывом абстрактных математических структур от реальности. – *В.Б.*)»[28]. Даже в изданиях, которые можно считать цитаделью математического мышления типа Notices of the American Mathematical Society, в последнее время появляются статьи, настаивающие на присутствии существенно неформальных компонентов в математических доказательствах, лишающих последние претензий на абсолютную строгость и их полноту, имея в виду «выписанность» всех шагов в доказательстве. «Математика подобна паутине полу- (или не вполне) доказанных теорем… Мы, математики, любим говорить о “надежности” нашей литературы, но в реальности она как раз не является надежной… Истина в математике может определяться политическими соображениями», – утверждает М. Натансон[29]. Социальный пресс, по его мнению, часто заставляет игнорировать ошибки в математических доказательствах, а сами теоремы можно даже интерпретировать в терминах социальных систем, аналогичных кланам или группам людей, связанных родственными узами[30]. В этом смысле не кажется экстравагантной идея, обоснованная Л. Грэхэмом, о том, что даже «математические уравнения имеют социаль-

[27] Informal Logic. Inverness (Calif.). 1980. P. X.

[28] *Scriven M.* The Philosophical and Pragmatical Significance of Informal Logic // Informal Logic. Inverness (Calif.). 1980. P. 148. См. также: *Грифцова И.Н.* Логика как теоретическая и практическая дисциплина. М., 1998.

[29] *Nathanson M.* Desperately Seeking Mathematical Truth // Notices of the AMS. 2008. № 7. P. 773.

[30] Ibid // The Mathematical Intelligencer. 2009. Vol. 31, № 2. P. 9–10.

ные атрибуты»[31]. Грэхэм имел в виду стиль математического мышления, который касался формулировки В.А. Фоком уравнений теории гравитации в форме, отличной от эйнштейновской. Эта форма, по мнению Грэхема, достаточно неприкрыто задавалась социально-политическими воззрениями Фока.

Исследование психологических аспектов неформального доказательства показывает, что в дискуссии бремя доказательства ложится прежде всего на ту сторону, которая инициирует дискуссию и выставляет аргументы первой, а к оппонирующей стороне могут предъявляться более «мягкие» требования в смысле силы аргументов. Здесь возникает ситуация, обратная той, которая описывается преимуществом «первого хода».

## Доказательство как процедура убеждения

Если доказательство до некоторого времени рассматривалось как безличная конструкция (впрочем, большинство ученых склонно рассматривать его так и поныне), то в теории аргументации оно приобретает новые измерения, характеризующие те структуры познавательного отношения, которые, с одной стороны, стремятся к «безличностному» знанию, а с другой – к субъекту, личности, получившей это знание, к манере его преподнесения, к степени убедительности для тех, кому оно адресовано, к тому, какую смысловую нагрузку в него вкладывает собственно «живой» источник этого знания. Таким образом, доказательство оказывается завязанным в один узел с социальным и психологическим контекстом, с этическими соображениями. Иначе говоря, теория аргументации преимущественно делает акцент на доказательстве не как форме выводного знания, а на доказательстве как форме *убеждения* в истинности тезиса, на механизмах и источниках этого убеждения, на *факторах, благодаря которым оказывается прав тот, кто высказывает тезис*[32].

Хотя понятие доказательства (в широком смысле) и не допускает точного и исчерпывающего определения, суть этого понятия раскрывается именно через убедительность умственного построения, претендующего на статус доказательст-

[31] См.: *Грэхем Л.* Имеют ли математические уравнения социальные атрибуты? // Науковедение. 2004. № 4. С. 121–131.

[32] См. также: *Бажанов В.А.* Логико-математическое доказательство в социальном контексте // Человек, философия, культура. Вып. 3. М., 1984. С. 56–60; *Бажанов В.А.* Аргументация, доказательство и нормы науки. Этический и психологический подтекст дискуссии Бора и Эйнштейна // Философские проблемы аргументации. Ереван, 1986. С. 427–436.

ва, которое представляет собой «убедительное рассуждение, убеждающее нас настолько, что с его помощью мы способны убеждать других»[33]. На важность убедительности доказательства указывают многие математики и философы математики: «цель доказательства – убедить компетентных специалистов»[34], «мы доказываем в определенном контексте и адресуем доказательства определенной аудитории», которая готова быть «убеждаемой»[35], «убеждающий потенциал воздействует на психологическое состояние аудитории»[36]. Даже последовательные сторонники и разработчики методов формальных доказательств не могут не обратить внимание на ключевую роль фактора убедительности в процедурах доказательства[37]. При этом убедительность доказательства в целом определяется убедительностью самого слабого звена доказательства.

Убеждающую сторону доказательства замечают и те, кто настаивает на том, что едва ли не исключительная прерогатива, мотив и оправдание доказательства – это поиск новых истин, а не апелляция к научному сообществу. Так, В.Я. Перминов, связывающий математику с априорным характером логики и первичных математических идеализаций, да и вообще математики, пишет: «Это доказательство нас убеждает и мы представляем, что оно совершенно строго… Математики убеждают себя и других в правильности своих доказательств»[38]. Всецело разделяя мнение, что поиск новых истин – важная цель доказательства (но никоим образом не поддерживая точку зрения В.Я. Перминова на априорную природу логики и математики), я все же склонен думать, что оно относится к иному измерению доказательства, нежели те измерения, которые принадлежат *мотиву* доказательства и его *оправданию*. Конечно, мотив, цель и оправдание доказательства можно разделить с известной степенью условности, но речь, по-видимому, должна идти о том, что гносеологическое, социальное, аксиологическое, телеономическое и дру-

---

[33] *Успенский В.А.* Семь размышлений на темы философии математики // Закономерности развития математики. М., 1987. С. 140.

[34] *Hersh R.* Proving is Convincing and Explaining // Educational Studies in Mathematics. 1993. Vol. 24, № 4. P. 389.

[35] *Thurston W.P.* On Proof and Progress in Mathematics // Bulletin of the AMS. 1994. Vol. 30, № 2. P. 170, 173.

[36] *Weintraub E.R., Gayer T.* Equilibrium Proofmaking // Journal of the History of Economic Thought. 2001. Vol. 23 (4). P. 440.

[37] См., например: *Harrison J.* Formal Proof – Theory and Practice // Notices of the AMS. 2008. Vol. 55, № 11. P. 1403.

[38] *Перминов В.Я.* Развитие представлений о надежности математического доказательства. М., 1986. С. 5, 151.

гие измерения доказательства все же не тождественны друг другу и в общем случае различимы (хотя, повторяю, и с известной степенью условности). Невольно, стало быть, возникает вопрос о допустимости и/или недопустимости тех или иных аргументов, средств доказательства, что по существу автоматически ставит проблему его осмысления в социально-этическом аспекте. Можно даже выразиться сильнее: мотив и оправдание доказательства не могут быть полноценно осмыслены вне этого аспекта.

Вовлечение в орбиту исследований по теории аргументации социально-этических измерений доказательства не случайно. Оно вызвано насколько изменениями в нормах логико-математической доказательности, настолько и теми гранями, которыми эти изменения сопряжены, вообще говоря, с этическими, равно как и социальными и психологическими аспектами процесса принятия и оценки познавательного значения доказательства.

## Принцип сочувствия и доказательство

Развитие все более сложных и изощренных методов и приемов доказательства лишь отчасти можно объяснить стремлением отыскать более эффективные формы творческой деятельности в сфере дисциплин логико-математического цикла: доказательство как формально-логическая процедура – инструмент, скорее, не открытия нового, а последовательного, непротиворечивого рассуждения и обоснования. Доказательство – своего рода дисциплинирующая матрица мышления, его «грамматика» (знание которой, понятно, ни в коей мере не обеспечивает успех в достижении новаторского результата). Тогда спрашивается, каковы стимулы для придания доказательствам более строгого, конструктивного и формализованного характера?

Открытие нового (включая, между прочим, новые методы рассуждения, аргументации и приемы доказательства) – обычно (впрочем, не всегда) итог скачка в качестве мыслительной деятельности – скачка, который зачастую представляет собой озарение и воспринимается как именно озарение. Ученый руководствуется здесь главным образом своими интуитивными представлениями, он опирается на свой содержательный, не формализуемый опыт. Он интуитивно ощущает правильность посетившего его озарения, справедливость своей идеи или зарождающейся теории. Его действия в такой ситуации подчиняются «принципу сочувствия (интуиции)» в эвристике. И принять идею или теорию может на этой стадии лишь тот, кто «чувствует» то же самое, кому интуиция подсказывает тот же самый результат. Эта ситуация описывается принципом сочувствия (соинтуиции) – подчеркивал С.В. Мейен. Если бы озарение автора идеи всегда встречало «соозарение» современников, если бы интуитивно ясное одному становилось «соинтуитивно» понятным другим, то не было бы многих препятствий на пути распространения «сумасшедших идей», «идей века»… Однако «к интересным идеям предъявляются сразу же жесткие требования полной строгости, чуть ли не законченной аксиоматизации»[39].

Доказательство и развернутая система аргументации вступают в свои права лишь после того, как с той или иной степенью полноты, ясности обозначился образ тезиса доказательства. Резонно задать вопрос, а не скрывает ли последнее суждение противоречие: если процесс доказательства и аргументации предназначен только для упорядочения, обоснования и систематизации нового знания, то, быть может, в развертывании многосложной системы аргументации и в доказательстве как таковом нет сколько-нибудь насущной необходимости? В чем тогда состоит их назначение, реальный смысл, в чем заключается оправдание усилий по разработке изощренной техники доказательства, прежде всего, разумеется, в математике? Чем, скажем, оправдано и стимулировано доказательство двух гипотез Бернсайда из теории конечных групп (о существовании неразрешимых конечных групп нечетного порядка), занимающих около 500 страниц каждое? Не являются ли напрасными титанические усилия 100 математиков из 6 стран, в течение нескольких десятков лет производивших классификацию полных конечных групп, изложенную в 20 (двадцати) томах, содержавших 15 000 (пятнадцать тысяч) страниц журнального формата?

## Этическая природа математического доказательства

Совсем не случайно совершенствовались приемы доказательств и изобретались новые способы аргументации, совсем не случайно знание, добытое путем озарения, принима-

[39] *Мейен С.В.* Принцип сочувствия // Пути в незнаемое. Писатели рассказывают о науке. М., 1977. С. 418.

лось научным сообществом и получало статус научного знания, признавалось достоверным, надежным и объективно истинным только тогда, когда оно в общем случае проходило через многочисленные «фильтры» доказательств, воспроизводилось многими поколениями ученых, когда под него подводился солидный фундамент в виде неоспоримой (на данном этапе) системы аргументации.

Доказательство есть не что иное, как форма апелляции к научному сообществу. Оно погружено в пространство мнений, оценок, норм рассуждений, стереотипов, оно реализуется с помощью средств аргументации, принятой в научном сообществе, и вне этого пространства независимо от этих средств, по-видимому, бессодержательно и уж во всяком случае неубедительно. Достаточно вспомнить судьбы многочисленных открытий, опережавших свое время и не получивших в определенный момент признания, как бы не втянутых в поток научной мысли, лишь впоследствии «созревающей» для их оценки или вынужденной генерировать их заново. Воображаемая логика Н.А. Васильева – тому пример. Другими словами, комплексное исследование и осмысление феномена доказательства и аргументации в целом вряд ли возможно вне социально-этических и/или психологических измерений, вне ее социального и культурного контекста.

Определенное научное сообщество является носителем и выразителем конкретных норм и эталонов доказательности, сторонником определенных средств и процедур аргументации, в неявном виде вплавленным в картину реальности, рисуемой теорией, общезначимой в ней, инкорпорированных в мировоззренческие и методологические установки ученых, в их стиль мышления. Здесь напрашивается аналогия с принципом относительности к виду взаимодействия или относительности к средствам наблюдения (В.А. Фока). Эта аналогия может быть продолжена до формулировки соответствующего принципа относительности к средствам аргументации[40].

Оценка того или иного научного положения, вообще говоря, должна включать оценку характера аргументации, который иногда может быть настолько «привязан» к последней, что вне учета аргументативного контекста просто теряет смысл. Именно с этих позиций следует, видимо, оценивать дискуссию представителей двух фундаментальных концеп-

[40] См.: *Бажанов В.А.* Наука как самопознающая система. Казань, 1991; *Bazhanov V.A.* Proof as an Ethical Procedure // Science and Ethics. The Axiological Contexts of Science ; Eds. E. Agazzi, F. Minazzi. Bruxelles, Bern, Berlin, Frankfurt am Main, New York, Oxford, Wien : Peter Lang, 2008. P. 185–193.

ций, «линий» в композиции научного знания – Бора и Эйнштейна.

Доказать – это в широком смысле убедить. Тем не менее убеждение – не только итог доказательства, но и его исходная точка. Доказательство опирается на убеждение, оно есть форма реализации последнего, однако первоначальное убеждение неизбежно корректируется после завершения доказательства, а иногда – в наиболее выдающихся, принципиальных случаях – само претерпевает качественные изменения. Убеждение – предикат не только личностного, но и надличностного. Поэтому рассуждение расценивается как доказательство при условии, если произойдет социальный акт его принятия, признания научным сообществом. История науки пестрит иллюстрациями данного положения. «Доказательство считается приемлемым, – пишет М. Клайн, – если оно получает одобрение ведущих специалистов своего времени или строится на принципах, которые модно использовать в данный момент»[41].

Социально-этическая природа доказательства и аргументации заключается, следовательно, в том, что *озарение из феномена внутриличностного переплавляется в феномен общезначимый, воспроизводимый и проверяемый* (*хотя бы в принципе*) *любым достаточно компетентным членом научного сообщества.*

Высказывая эту мысль, я, конечно же, отвлекаюсь от фактора времени и технических трудностей, играющих немаловажную роль в процедурах проверки того или иного результата. «Доказательства постепенно переходят из разряда явлений индивидуального опыта в разряд опыта коллективного, – замечает В.А. Успенский. – Само понятие убедительности (доказательства. – *В.Б.*) начинает терять свой индивидуализируемый оттенок и все больше приобретает характер “коллективной убедительности”»[42].

Логико-математическое доказательство представляет собой, как правило, лишь краткую схему формального вывода. Современное состояние логико-математического (и/или насыщенного логико-математическим содержанием) доказательства характеризуется заметным усложнением процедур демонстрации его достоверности, что налагает жесткие условия на эксплицируемость промежуточных этапов формального вывода. Доказательство между тем требуется там и тогда, где и когда оценивается надежность пути, проложен-

[41] *Клайн М.* Указ. соч. С. 363.

[42] *Успенский В.А.* Указ. соч. С. 147–148.

ного к новому знанию, обосновывается оптимальность и компактность этого пути.

В науке наступил период, когда часто воспроизведение (= проверка) доказательства является трудоемкой задачей. Так, проверка доказательств, проводившихся с помощью компьютера, требует составления программ более сложных и «емких», нежели проверяемая программа, а повторение аналитических выкладок фактически вынуждает воссоздавать формальный вывод чуть не в полном объеме. «Создается впечатление, что с развитием математики (и появлением все более и более сложных и длинных доказательств) доказательства теряют свое главное свойство – свойство убедительности. Делается непонятным, что же тогда остается до доказательства: ведь убедительность как бы входит в их определение. Кроме того, с усложнением доказательства возрастает элемент его субъективности… При чрезмерном возрастании объема доказательства расплывается само представление о доказательстве – подобно тому как в "большом" расплывается понятие о натуральном числе», – рассуждает В.А. Успенский[43].

Любопытно, что по наблюдению некоторых математиков, зачастую доказательства общих утверждений проще доказательства содержащихся в них частных случаев.

Предъявляя доказательство и развертывая систему аргументации, ученый этим *берет на себя ответственность* за достоверность, надежность и принципиальную воспроизводимость (в пределах принятых абстракций, идеализаций и средств аргументации) полученного им знания. Знание, которое по тем или иным причинам невоспроизводимо, так сказать, уникально, оказывается лежащим вне науки, оно по сути внеморально, пока недоказуемо и невыводимо с помощью используемых научным сообществом стандартов, пока средства аргументации не охватывают его концептуальной структуры.

Процесс преодоления пропасти между новаторским результатом и приданием ему *статуса доказательства* научным сообществом – сложный и противоречивый процесс. Одним (но не единственным и, быть может, не самым эффективным) рычагом, помогающим «вписать» принципиально новый результат в концептуальный строй науки, выступает диалог, принимающий форму дискуссии, обмена мнениями, спора. Разумеется, не всегда диалог представляет собой действенный канал коммуникации и взаимопонимания, но во всяком случае он позволяет достаточно четко обозначить точки рас-

[43] *Успенский В.А.* Указ. соч. С. 150–151.

хождения и моменты близости позиций. Водоразделом между дискутирующими сторонами служат различные типы миропонимания, различия в средствах аргументации, в стилях мышления, разнопорядковость используемых абстракций. Впрочем, однопорядковость уровней абстрагирования и обобщения не гарантия консолидации противоположных позиций в процессе диалога.

Именно такого рода дискуссии в духе критической рефлексии (в частности, на семинарах) позволяют восполнять пробелы, обнаруживать и исправлять ошибки, которые встречаются даже у крупных математиков. Математическое сообщество, таким образом, фактически разделяет ответственность авторов доказательств, корректируя эти доказательства.

Как известно, «*ошибки играют в математике не меньшую роль, чем доказательства*: анализируя их причины и пути их преодоления, можно быстрее идти вперед, чем тупо пытаясь продвинуться в малоизученном направлении»[44].

Соображениями коррекции (поиска более компактной и/или изящной процедуры, другой формы, относящейся, например, к новым техническим приемам и т.п.) мотивируются и новые доказательства уже известных результатов.

## Сдвиги в критериях оценки математических доказательств: синдром Саймона

Усложнение методов доказательства приводит к тому, что центр тяжести в проверке достоверности предположительно доказанных результатов переносится на *косвенные* соображения. Такие, например, как оценка соответствия результата общим ожиданиям, тенденциям развития теории, исследовательской программе, критериям преемственности, простоты знания, репутации школы, которую представляет ученый, авторитету научного руководителя или рецензентов и т.д. Речь идет о смещении оценок в процедурах проверки данных результатов именно в сторону социальных и этических аспектов. Вот, в частности, почему «доказательства одного поколения воспринимаются другим поколением как ворох логических ошибок… В наше время понятие строгости зависит от того, к какой школе принадлежит математик»[45].

[44] *Арнольд В.И.* Указ. соч. С. 46.

[45] *Клайн М.* Указ. соч. С. 367.

Все это означает, очевидно, что существенно возрастает ответственность автора доказательства. *Те внешние требования, которые налагаются на доказательство научным сообществом через сложную цепь опосредований, преобразуются во внутреннюю основу мотивации* (*потенциального*) *автора доказательства*. К сумме методологических, эвристических, парадигмальных регулятивов научного поиска прибавляются такие регулятивы, как чувство внутренней ответственности, совесть ученого, его самокритичность и непредвзятость. Это тем более важно потому, что «математики гораздо больше озабочены доказательством собственных теорем, чем поиском ошибок в чужих доказательствах… В действительности математик не полагается на строгое доказательство до такой степени, как обычно считают»[46].

Впрочем, то обстоятельство, что проверка правильности доказательства в настоящее время имеет тенденцию производиться с помощью косвенных соображений, не только прибавляет к регулятивам научного поиска регулятивы социально-этического плана, но и ставит серьезные социально-этические проблемы, предполагающие методологическое осмысление. Одна из таких проблем известна под условным названием «синдром Саймона».

Пожалуй, впервые острота этой проблемы была в полной мере прочувствована после компьютерного доказательства теоремы о четырех красках. Фактически это была первая важная теорема, доказанная машинными средствами. Если домашинная (докомпьютерная) часть доказательства представляла собой аналитическую процедуру, выраженную пусть весьма сложным, но обозримым текстом, то машинная (компьютерная) часть доказательства – его, безусловно, решающее звено – фактически происходила автономно от остального доказательства и не допускала распечатки в виде обозримого текста. Оператор не мог дать гарантию, что в период вычислений (который в 1976–1977 гг. занимал в доказательстве теоремы о четырех красках более 1200 часов) не имел место сбой или другие неполадки, искажающие конечный результат. Таким образом, доказательство, аналогичное по природе доказательству о четырех красках, оказывалось по существу невоспроизводимым, т.е. не удовлетворяющим требованию, общему для всякого – естественно-научного или математического – результата[47].

---

[46] *Клайн М.* Указ. соч. С. 361.

[47] В 2004 г. теорема о четырех красках была доказана компьютерным способом еще раз, причем в виде формального доказательства.

«Синдром Саймона» как раз и является производным от той (вероятно, неблагополучной с классической точки зрения) ситуации, когда доказательство (или его часть) невоспроизводимо. Тогда ученый, однажды приобретший авторитет сильными результатами, полученными с помощью традиционных – воспроизводимых – доказательств, способен полагаться уже не на общепризнанно надежные методы, допускающие непосредственную проверку, а на, скажем, собственный авторитет (или репутацию школы, к которой он формально принадлежал). «*Никогда не следует поддаваться... гипнозу авторитетов, сущность дела важнее, чем авторитетность классической формулировки*!», – подчеркивает В.И. Арнольд[48]. Тогда он, например, может опустить доказательство, заведомо зная, что его собственное реноме в прошлом обеспечит принятие научным сообществом предложенного им тезиса (теоремы, вычисления, модели и т.п.). Похожая ситуация создается, когда авторитетный ученый дает положительную рецензию на рукопись, отзыв на диссертацию и т.д., которую он тщательно не изучил или по каким-то иным вненаучным соображениям (например, личная расположенность, доверие). Здесь проявляется научная недобросовестность, которая в конечном счете ведет к снижению профессионального уровня, девальвации критериев научности, размыванию контуров научного сообщества, а стало быть, единственно допустимые соображения при любом оценочном суждении ученого, связанные с объективной истиной, оказываются отодвинутыми в сторону. Возникает феномен теневой науки[49]. Истина, как известно, представляет собой и моральную ценность.

## Процедурная специфика математических доказательств

Несмотря на фактически универсальный фундамент, доказательства различаются по своим процедурам, точнее, «процедурным» компонентам.

Можно говорить о *декларативном* компоненте доказательства, который относится к *предмету* доказательства, о *собственно процедурном* компоненте, который определяется тем, *как, какими средствами* производится доказатель-

[48] *Арнольд В.И.* Что такое математика? М., 2004. С. 70.

[49] См.: *Бажанов В.А.* Наука как самопознающая система. Казань, 1991. Гл. 4.2; *Юревич А.В.* Теневая наука.ru // Вестник РАН. 2006. Т. 76, № 3 (2006). С. 234–241.

ство, *объяснительном* компоненте, который показывает, по *каким «причинам» и основаниям* данные теоремы являются истинными, *энтимематическом* компоненте, который характеризуется «пробелами» (преднамеренными и/или неосознаваемыми) в доказательстве, а также *ригористском* компоненте, который задается уровнем принятой строгости в доказательстве и который наиболее подвержен пересмотру с течением времени (что, разумеется, влечет и пересмотр деталей собственно процедурного компонента).

Особенно важно отметить роль дидактических соображений в *собственно процедурных* компонентах в поиске и получении нового математического знания.

История математики достаточно уверенно свидетельствует, что крупные прорывы, а иногда и революции в математике часто сопряжены с написанием учебников. Можно вспомнить об истории открытия неевклидовой геометрии Н.И. Лобачевским или обосновании анализа О. Коши. И это естественно: дидактические цели требуют возможно наиболее доступного и прозрачного изложения, в котором не было бы места «пробелам» в доказательствах, недоговоренности, неопределенности и т.п. Поэтому авторы учебников вынуждены глубже и основательнее, чем обычно, продумывать доказательства, что нередко приводит к тому, что выявляются новые точки роста математического знания. Преследуя, казалось бы, чисто дидактические цели, они фактически решают некоторую научную сверхзадачу: осуществляют поиск нового знания.

Эти соображения, впрочем, не затрагивают взаимоотношений учителя и ученика, которые не укладываются в рамки, задаваемые собственно трансляцией знаний и умений, а определяются множеством личностных факторов. Так, Ш. Эрмит, который являлся, как сегодня выражаются, научным руководителем А. Пуанкаре, был крайне недоволен нежеланием последнего прислушиваться к его советам, шлифовать и публиковать полные доказательства. Эрмит даже отстранял Пуанкаре от преподавания.

Ирония истории заключается в том, что имя Эрмита уже во многом принадлежит прошлому математики, а многие разделы математики второй половины XX и начала XXI в. развиваются в контексте идей А. Пуанкаре.

Это не удивительно – иные нормы доказательности по сравнению с XIX в., иной социально-психологический контекст развития математики. Тем не менее думается, что несмотря на прямую зависимость от научного сообщества, этический смысл и цель доказательства носят вневременной характер.