NOTE SUR L'INTUITION EN MATHÉMATIQUES.

Par M. WINTER.

La question du rôle que l'intuition joue en mathématiques a soulevé dans ces derniers temps de nombreuses discussions. Nous voudrions essayer de faire brièvement le bilan de ces controverses. On doit tout d'abord distinguer dans le problème le point de vue méthodologique et le point de vue métaphysique.

En se plaçant au premier point de vue, on se demandera quelle est l'*étendue* et quelle est l'*exactitude* de la méthode *intuitive*, c'est-à-dire de la méthode qui consiste à étudier les êtres mathématiques abstraits, arithmétiques ou analytiques, nombres ou fonctions, au moyen de représentations spatiales, de réseaux ou de courbes. Et l'on peut prévoir immédiatement que le problème ainsi posé ne comportera pas une solution précise comme un problème particulier d'analyse ou de géométrie. Il s'agit, en effet, ici, d'apprécier une méthode générale qui a joué et qui jouera toujours en mathématiques un rôle immense, et qui tantòt paraîtra se restreindre, tantôt paraîtra s'étendre. On doit naturellement se borner à indiquer quelques-uns des résultats obtenus et à préciser certains points.

Formulons d'abord la proposition avec précision: étudier un être mathématique abstrait intuitivement, c'est établir une certaine correspondance entre les éléments abstraits et les éléments représentatifs (entre des nombres et les points d'une droite par exemple).

Deux *questions* sont donc à trancher: d'abord ces modes de correspondance sont-ils toujours possibles? ensuite quand ils sont possibles, quel est le degré de précision du raisonnement sur l'élément intuitif, représentant l'élément conceptuel?

Il y a longtemps que l'on sait que les fonctions continues sans dérivée, comme la somme infinie $\sum_{n=0}^{n=\infty} b^n \cos \pi a^n x$, qui n'admet pas de dérivée sous certaines conditions, ne sont pas susceptibles d'être représentées par des courbes correspondantes. Mais cette constatation ne fut qu'un commencement. M. F. Klein dans un remarquable exposé fait à la Société de Philosophie de Vienne, le 14 octobre 1905, constate: «daß die stetigen, nicht differentiierbaren Kurven nur ein Anfang gewesen sind, daß mit mehr Vorliebe noch von den jüngeren Mathematikern die Punktaggregate studiert werden, mit denen sich die sogenannte Mengenlehre beschäftigt. Diese liegen mit ihren merkwürdigen Eigenschaften erst recht über alle Anschauung hinaus.» Et dans la même séance l'illustre physicien Boltzmann ajoutait: «Daß die Punktmengen, nicht nur der mathematischen Mannigfaltigkeitslehre, sondern auch die, welche eine physikalische Bedeutung haben, über unsere räumliche Vorstellung hinausgehen, das ist meine vollständige Überzeugung». Et il cite un exemple emprunté à la théorie des gaz. Il existe donc des êtres mathématiques qu'on peut appeler transintuitifs, en ce sens que nulle image n'y correspond dans l'espace.

La considération de certaines fonctions a restreint le domaine de l'intuition. Mais d'autre part, on peut en un certain sens généraliser la méthode représentative, ainsi que le prouve l'introduction dans la science des représentations dans un espace non euclidien: on sait l'immense parti que M. Poincaré a tiré dans l'étude des groupes fuchsiens de la considération des représentations géométriques dans une conique absolue de Cayley correspondant aux transformations dans le plan analytique. Et puisque nous voyons qu'on peut en un sens restreindre, et en un sens généraliser la méthode intuitive, on doit se demander s'il y a une réponse à la question suivante: quand est-ce que les êtres mathématiques cesseront *toujours* d'être représentables? Et nous croyons qu'on peut formuler la réponse générale suivante: ils cesseront d'être représentables toutes les fois que l'infini entrera explicitement dans le raisonnement. Nous pourrions appuyer cette manière de voir sur des exemples précis. Mais pour ce faire nous devrions entrer dans des considérations trop techniques pour être développées ici.

Nous devons maintenant examiner notre *deuxième question*: quelle est la valeur de la méthode intuitive dans les domaines où elle peut être appliquée. Or, il ne semble pas contestable que l'intuition spatiale proprement dite, c'est-à-dire le dessin géométrique, ne représente qu'approximativement l'être conceptuel, et nous dirons encore avec M. F. Klein *(loc. cit.)*: «dass unsere Raumvorstellung eine untere Schwelle der Genauigkeit hat, und dass das, was wir vor Augen haben, wenn wir von einer Kurve sprechen, ein *Streifen* von allenfalls sehr geringer, jedenfalls nicht verschwindender Querdimension ist». L'intuition spatiale n'a pas le caractère d'exactitude absolue des notions logiques, et c'est une raison pour qu'on ne puisse uniquement à cause d'elle s'opposer aux interprétations non-euclidiennes — qui sont d'ailleurs exemptes de contradictions logiques. En effet, pour prendre l'exemple de M. Klein, si l'on considère un point distant d'une droite comme Sirius l'est de la Terre, et qu'on imagine passant par ce point deux parallèles à la droite donnée, l'angle des deux parallèles étant égal à un millionnième de seconde, l'intuition, c'est-à-dire la vision dans l'espace, ne permettra pas de décider si les deux parallèles passant par le même point sont distinctes ou non; on peut les considérer comme distinctes sans heurter l'intuition, puisque l'angle d'écart ne peut-être saisi par elle. Est-ce à dire que les méthodes de la géométrie pure, soient également approximatives? Assurément non. Mais on ne peut purger la géométrie pure, considérée, soit comme distincte de l'analyse, soit en relation avec elle, de l'inexactitude intuitive, qu'en la fondant sur une base logique, c'est-à-dire en admettant que le géomètre se sert de la figure perçue dans l'espace comme auxiliaire, mais qu'il raisonne en réalité sur les notions intellectuelles; c'est ce qu'ont parfaitement compris les géomètres-logiciens de l'école moderne.

Il nous reste, maintenant, à envisager le *point de vue métaphysique.* Si, lorsqu'il s'est agi de la question méthodologique, nous avons pu donner certains résultats, ici nous allons nous trouver en face d'un problème insoluble. Il ne s'agit maintenant de rien moins que de déterminer la nature de la pensée mathématique considérée en elle-même, et de savoir si l'intuition en constitue l'élément essentiel. Mais on ne saurait trop insister sur ce fait que le mot intuition n'a plus ici le même sens que tout à l'heure; il ne s'agit plus ici du dessin géométrique représentant la fonction, puisque les partisans de la thèse intuitioniste soutiennent que même dans le domaine de l'arithmétique et de l'analyse pures l'intuition intervient encore; l'intuition est ici un certain principe métaphysique dont on ne peut donner la définition scientifique, mais qu'on peut dans une certaine mesure déterminer de la manière suivante : l'intuition est transcendante par rapport aux formes purement logiques et elle a un caractère synthétique et contingent. Et alors se présente cette question : la pensée mathématique est-elle principalement intuitive, ou se réduit-elle à une déduction logique à partir de certains éléments premiers ? Mais il en est de cette question comme de tous les problèmes métaphysiques, elle a un caractère antinomique qui rend la thèse aussi vraisemblable que l'antithèse.

A la vérité, dans ces derniers temps, le problème métaphysique ne s'est pas présenté sous la forme abstraite que nous lui donnons, mais il n'est pas difficile de montrer, qu'en fin de compte, dans les discussions sur le rôle de l'intuition dans la découverte scientifique, c'est bien de lui qu'il s'agit.

L'intuitioniste est surtout frappé par ce fait : la découverte scientifique est l'œuvre du génie individuel, elle n'est en aucune façon le résultat d'un travail automatique, combinaisons machinales de principes posés : il y faut toujours un acte créateur et personnel d'intelligence. Le logicien est frappé par la constatation que l'on peut toujours suivre dans la découverte une fois faite, chaque moment de la pensée de l'inventeur, chacune des étapes de sa démonstration qui s'enchaînent logiquement à partir de certains principes posés. De plus, les découvertes des divers savants ne forment pas, chacune considérée isolément, un tout autonome sans lien avec les autres, comme les œuvres d'art par exemple. Au contraire, elles se déduisent les unes des autres et forment ensemble un tout. La trigonométrie, la géométrie élémentaire, la géométrie analytique, la théorie des équations algébriques et bien d'autres doctrines mathématiques, sont chacune l'œuvre d'un grand nombre de géomètres dont les efforts se sont fondus.

Le logicien va plus loin, il soutient que ce qui distingue l'intuition *vraie* de la fausse, c'est que la première suit des lois logiques, tandis que la deuxième ne les suit pas : en un mot que l'intuition vraie est démontrable. N'est-ce pas dire alors que l'intuition vraie n'est que la divination inconsciente de la marche logique vraie ? Et alors se trouverait résolu et en faveur du logicien, le problème posé tout d'abord. Que les logiciens ne se hâtent pas de se réjouir, car les intuitionistes ne se tiendront pas pour battus. En effet disent-ils, qu'est-ce que cette prescience logique ? De deux choses l'une : ou l'analyse élémentaire des propositions et principes fondamentaux faite par le logicien est complète, et alors à partir de ces propositions et principes, on pourra, en suivant les lois de la logique, retrouver toutes les vérités; ou cette analyse logique ne sera jamais complète, il faudra toujours, à certains moments, choisir de nouveaux principes, et dans le choix de ces principes l'intuition seule pourra nous guider. Or, c'est la seconde alternative qui est la vraie, sans quoi les logiciens pourraient construire définitivement la science entière, et l'on sait qu'ils n'en font rien.

Mais l'intuitioniste se trouve maintenant en face de l'alternative suivante: ou bien la thèse qu'il soutient signifie seulement que la découverte des vérités nouvelles exige des qualités d'esprit qui ne sont pas purement machinales, que le savant inventeur n'est pas une machine à calculer, et alors il formule un véritable truisme; ou bien sa thèse consiste à prétendre que l'élément intuitif qui intervient *en fait* au moment de la découverte, doit être maintenu *en droit* comme un élément constitutif de la pensée, et alors on retrouve le problème métaphysique et antinomique que nous avons primitivement posé.

Si l'intuitioniste et le logicien ont pris alternativement l'avantage, et l'on pourrait poursuivre indéfiniment la controverse, et si ni l'un ni l'autre n'a triomphé définitivement, c'est qu'ils opposent en réalité des thèses métaphysiques dont le propre est de ne pouvoir jamais se démontrer scientifiquement et péremptoirement. Le plus sage est donc de ne pas s'attarder à chercher une solution à des problèmes qui n'en comportent pas.

DISKUSSION.

W. M. Kozlowski admet que l'intuition sert toujours de point de départ pour l'abstraction; une fois fixée par l'intuition la vérité mathématique peut être développée par le raisonnement. L'intuition est sous entendue dans les déductions mathématiques ainsi que (je tâcherai de le prouver dans une de mes communications) l'idée de cause est tacitement admise comme condition de l'application d'une fonction mathématique à l'étude de la réalité. Si on ne l'apperçoit pas ce que la chose est trop familière. C'est ici qu'on peut appliquer le mot de Kant: l'intuition sans concept est aveugle, le concept sans intuition est vide.

Si on pouvait construire une géométrie sans intuition il serait possible de former une géométrie analytique indépendente de la géométrie synthétique et la précédant.

Ackermann (Paris).